

República de Honduras
Secretaría de Educación



MATEMÁTICA I

Guía del Docente

Décimo grado

10

Bachillerato en Ciencias y Humanidades
Bachillerato Técnico Profesional
Educación Media

Nota: Cualquier observación encontrada en esta obra, por favor escribir a la Dirección General de Tecnología Educativa de la Secretaría de Educación, para ser rectificado y mejorado en las próximas ediciones, nuestro correo electrónico es: **tecnologia.educativa@se.gob.hn**

Presentación

La Secretaría de Educación presenta la **"Guía del Docente"** de Matemática para Educación Media, que tiene su fundamento en el Plan de Estudio y Programas Curriculares, Área de Matemáticas, misma que fue elaborada por un equipo técnico en el marco del Proyecto Mejoramiento de la Enseñanza Técnica en el Área de Matemáticas (PROMETAM FASE III).

Con esta Guía se pretende apoyar al docente en la intervención activa de mediación entre el contenido y las formas de aprendizaje. Además, brindar apoyo metodológico para favorecer los aprendizajes significativos que impacten en la motivación de los jóvenes y como consecuencia, se incremente la retención y aprobación, y se mejore el rendimiento académico de los estudiantes en los centros educativos.

En la búsqueda del cambio hacia una nueva Honduras, el recurso humano es el único capaz de generar riquezas a través de la aplicación de sus conocimientos, competencias y acciones; por lo que se espera que los docentes realicen una labor educativa con calidad y pertinencia y la Secretaría de Educación a su vez, se compromete para que la población tenga acceso a una educación, que mejore en cada generación.

Secretaría de Estado
en el Despacho de Educación

Instructivo de uso
“Guía del Docente”

Esta Guía está diseñada para orientar a los docentes cómo enseñar los contenidos para cada grado, prescritos en el Plan de Estudios y Programas Curriculares, Área de Matemáticas, usando como parte del proceso el Libro del Estudiante.

Hay un plan de estudio para todas las clases y se espera que el docente lo ajuste según el rendimiento y el entorno de sus estudiantes.

En el Libro del Estudiante hay una diversidad de ejercicios para garantizar el trabajo individual. Muchos de éstos podrán ser utilizados como tareas para resolver en casa y deben ser revisados individualmente o en forma colectiva, siempre dirigida por el docente para afianzar el conocimiento.

Para mayor información véase la “Estructura y Aplicación de la Guía del Docente”.



Índice

Estructura y aplicación de la Guía del Docente

ESTRUCTURA Y APLICACIÓN DE LA GUÍA DEL DOCENTE

1. Objetivo de la Guía del Docente

Este libro es una guía que explica el plan anual de estudio y el desarrollo de las clases basado en el contenido del Plan de Estudios y Programas Curriculares, Área de Matemáticas. Si el Docente aprovecha esta Guía, le ayudará a desarrollar su clase de manera efectiva y eficientemente para que el rendimiento de los estudiantes mejore.

2. Estructura de la Guía del Docente

Estructura Global: Está formada por dos partes: la "Estructura y aplicación de la Guía del Docente" que explica el contenido de la Guía y la forma como se utiliza y el "Desarrollo de Clases de cada Unidad" que describe los pasos a seguir para alcanzar los objetivos de cada clase.

Estructura de la Unidad: En cada unidad se desarrolla paso a paso los contenidos conceptuales tomados del Plan de Estudios y Programas Curriculares (PEPC). La estructura de cada unidad se explica detalladamente en el instructivo.

3. Instructivo para el uso de la Guía del Docente y del Libro del Estudiante

Esta Guía del Docente (GD) fue diseñada para enseñar los contenidos indicados en el PEPC, utilizando eficazmente el Libro del Estudiante (LE), para explicar los principios de cada tema y la manera de desarrollar la clase.

Aunque se indica la manera de usar el LE, no necesariamente se describe una forma única de desarrollar la clase, sin embargo, se ha intentado que los docentes puedan dar la clase sin dedicar mucho tiempo a los preparativos. El docente podrá hacer las modificaciones adecuadas cuando lo crea necesario.

En la GD se presenta la Programación Semestral y Desarrollo de Clases de cada Unidad.

4. Programa Semestral

Es la lista de los contenidos del grado indicados en el PEPC, con el número de clases asignadas a cada tema. Con la misma, los docentes deben conocer qué tienen que enseñar, y hacer su plan semestral de modo que se cumplan todos los temas.

Desarrollo de Clases de cada Unidad

Está divida en cinco secciones:

1) Competencias de la unidad: Presenta las competencias que se pretenden desarrollar en el estudiante en el desarrollo de la unidad.

2) Relación y desarrollo: Muestra el flujo de los contenidos del grado por semestre, relacionándolos con contenidos de grados anteriores y con las matemáticas siguientes.

3) Plan de estudio de la unidad: Presenta la distribución de las clases en cada lección.

4) Puntos de lección: Presenta aspectos importantes a considerar en el desarrollo de cada lección.

5) Desarrollo de clase: Presenta el objetivo, la evaluación y el proceso de enseñanza.

1) Competencias de la unidad

Se presentan las competencias para cada unidad, tal y como están descritas en el PEPC Área de Matemáticas.

2) Relación y desarrollo

Se muestran los contenidos de la unidad y su relación con otras unidades (ya sean de este grado, o anteriores). Los docentes deben diagnosticar si los estudiantes tienen dominio sobre los contenidos relacionados de los grados anteriores, de lo contrario dependiendo del nivel de insuficiencia en el manejo, se puede hacer lo siguiente:

(a) Si la mayoría de los estudiantes carecen de comprensión, de tal modo que no se puede enseñar el contenido del grado, se les da un repaso de dos o tres horas clase. Para el menor manejo del contenido, es mejor darles tareas al mismo tiempo que la enseñanza del contenido del grado.

(b) Si la mayoría entiende bien se le puede dar orientación individual a los que lo necesiten.

3) Plan de estudio

Se indica la distribución de las horas y el contenido. Como el tiempo total de la clase de matemáticas es limitado, se recomienda seguir los lineamientos indicados en la Guía.

4) Puntos de lección

Como cada unidad está dividida en lecciones, en esta parte se explican los puntos en que se deben prestar mayor atención durante el desarrollo de la clase. Los docentes deben entender la idea central por lo cual se desarrolla el plan de clase.

5) Desarrollo de clase

Está descrito el plan de cada clase para 45 minutos e incluye los objetivos, la evaluación y el proceso de enseñanza. No es recomendable prolongar la hora de clase, salvo en el caso donde los estudiantes hacen una tarea especial o el horario así lo exige.

a. Objetivo

Se representa el objetivo de la clase (hay casos donde un sólo aplica a dos o más clases seguidas). Es necesario tener éste claro para cada clase.

b. Evaluación

Se indican los ejercicios que el estudiante debe realizar en forma independiente o grupal considerando la estrategia que decida el docente con el propósito de verificar el logro del objetivo.

En caso de que existan dificultades en la mayoría de los estudiantes el docente debe reforzar esa parte.

c. Proceso de enseñanza

Se proponen actividades que el docente debe realizar durante la clase siguiendo el orden propuesto en el Libro del Estudiante.

La propuesta se basa en comenzar la clase planteando un ejemplo y tratar de que los estudiantes lo resuelvan sin consultar el LE, por lo que se debe garantizar el tiempo suficiente para que piensen y propongan sus ideas, luego los docentes tienen que darles explicaciones de forma concisa y con pocas palabras tratando de no hablar mucho, y considerando las ideas de los estudiantes concluir en la regla, definición, principio, etc. de la clase, para luego realizar la ejercitación.

En este proceso de enseñanza en algunas clase se utiliza la simbología M, RP y *.

M: Significa preguntas o indicaciones de los docentes a los estudiantes.

No es recomendable hace preguntas que los estudiantes pueden contestar con respuestas breves como “si” y “no”. Son muy importantes las preguntas que hacen pensar a los estudiantes, sobre todo en cada clase se necesita una pregunta principal que los concentre en el tema de la clase.

RP: Significa reacciones previsibles de los estudiantes.

Hay que preveer las reacciones de los estudiantes, incluyendo las respuestas equivocadas. Para corregir las respuestas equivocadas, no es bueno decir solamente <<esta mala>> y enseñar la respuesta correcta o hacer que contesten otros niños.

Hay que dar tiempo para que piensen porque está equivocada, al mismo tiempo los docentes tienen que pensar por qué se han equivocado y reflexionar sobre su manera de enseñar y preguntar. Además las respuestas de sus estudiantes pueden ser indicadores para evaluar el nivel de entendimiento.

***:** Hace referencia a los puntos y sugerencias de la clase y actividades del docente. Se refiere a puntos importantes que el docente debe tomar en cuenta para que el desarrollo de la clase sea exitoso.

En algunos casos en el LE aparecen ciertas clase utilizando asterisco (*) esto significa que son clases o ejemplos, ejercicios opcionales que el docente puede desarrollar dependiendo el nivel de entendimiento de los estudiantes.

Para ser más práctico el uso de esta GD en el aula de clases se da una descripción general, por lo tanto, no se les indica a los docentes todas las acciones a realizar, así que según la necesidad hay que agregar más o modificarlas. En forma general se aplican las siguientes acciones.

- La GD no dice nada sobre la evaluación continua porque ésta corresponde al objetivo, sin embargo, propone como se puede evaluar éste, a través de la ejercitación. La evaluación debe hacerse durante la clase y al final de la misma según la necesidad.
- No está indicado el repaso de la clase. Éste se hace según la necesidad.
- Cuando se les dan los ejercicios, los docentes deben recorrer el aula identificando los errores de los estudiantes y ayudándoles a corregirlos.
- Cuando la cantidad de ejercicios es grande, se hace la comprobación y corrección de errores cada 5 ejercicios, o una adecuada cantidad, para que los estudiantes no repitan el mismo tipo de equivocación.
- Preparar tareas como ser ejercicios complementarios para los estudiantes que terminan rápido.
- La orientación individual no está indicada, sin embargo, es imprescindible. Los docentes pueden realizarla en las ocasiones siguientes:
  – Cuando recorren el aula después de dar los ejercicios.
  – En el receso después de la clase.
  – En la revisión del cuaderno (hay que tener el cuidado que los estudiantes no pierdan el tiempo haciendo fila para que el docente corrija)

En la Guía del Docente se indica en la página del Libro del Estudiante las partes punteadas que se sugieren que el docente debe tener en la pizarra, sin embargo cada uno puede hacer su propia estructura de uso de la pizarra.

La estructura del LE y su uso

El docente puede comenzar cada unidad con un repaso de lo aprendido anteriormente. Esta parte no está indicada en las horas de clase y los docentes asignan el tiempo para trabajar según su criterio.

La unidad está dividida en lecciones, clases, ejercicios de la lección (algunas unidades no tienen ejercicios de lección). Cada clase tiene ejemplos y ejercicios.

Los ejemplos corresponden a los temas importantes de la clase. En la orientación de estos ejemplos es importante hacer que los estudiantes piensen por sí mismos; por lo tanto, para presentarlos, los docentes lo escriben en la pizarra para que los estudiantes no vean la respuesta en el LE antes de tratar de resolverlo.

Para resaltar los puntos importantes de la clase estos se remarcan.

En el LE se proponen ejercicios de lección esto con el objetivo de suministrar suficientes ejercicios para que el estudiante pueda resolver en el aula o como tarea en casa. El docente deberá utilizarlos de acuerdo a conveniencia ya que no se tiene tiempo estipulado para esta sección.

La página del LE tiene dos columnas. Una columna de contenidos y otra columna de recordatorios, sugerencias o notas. En el desarrollo de cada clase se encuentran varios iconos, que a continuación se explica cada uno.

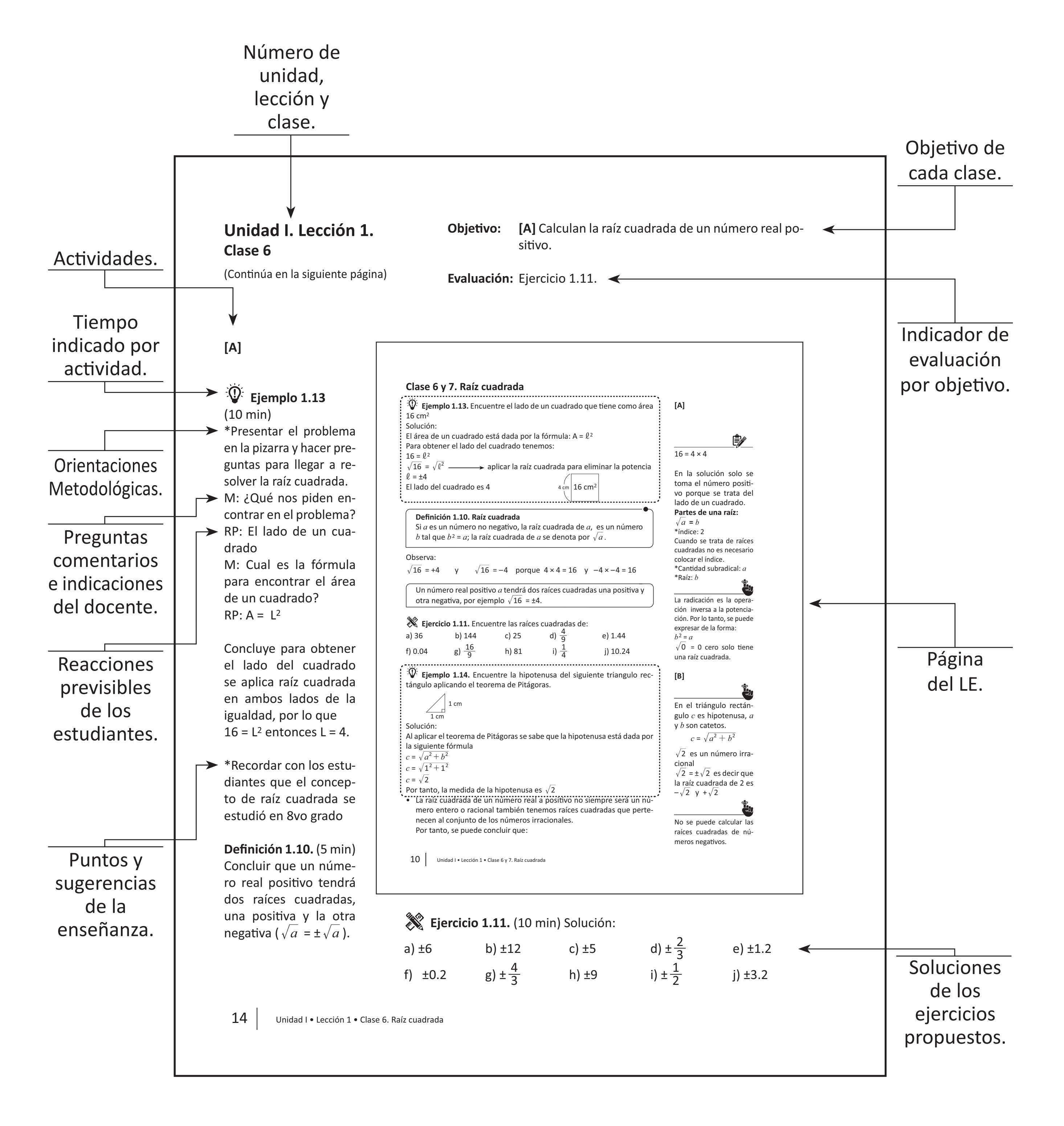
Cada ícono representa:

Icono	**Explicación**
	El desarrollo de un ejemplo.
	La propuesta de ejercicios o problemas.
	Aclaraciones o ampliaciones de conceptos trabajados en el libro a la vez algunos aspectos que se deben tener especial cuidado cuando se está estudiando un tema.
	Recordatorios de temas, fórmulas, conceptos, etc., vistos en años o clases anteriores.
	Conceptos, fórmulas, principios, reglas, etc., que es necesario que se memoricen para lograr mejor comprensión de los contenidos.
	Sugerencias que se proporcionan al momento de resolver un ejercicio o problema.

La GD lleva la solución de los ejercicios propuestos en el LE. Los docentes tienen que tomar en cuenta que en el caso de ejercicios y problemas con respuestas abiertas puede haber otras respuestas.

A continuación se explica el significado y simbología de la página del desarrollo de clases.

Significado de cada expresión y simbología en la página del desarrollo de clases.



4. Programación Semestral:

Unidad (horas)	Contenido	Pág. de GD (Pág. de LE)
I. Fundamentos de aritmética y Algebra (29 horas)	Números Reales	2 – 28 (2 – 20)
	Ecuaciones e inecuaciones	29 – 46 (21 – 38)
	Coordenadas Planas	47 – 52 (39 – 43)
II. Introducción a la trigonometría (15 y *2 horas)	Funciones trigonométricas del ángulo agudo	53 – 66 (46 – 56)
	Funciones trigonométricas de cualquier ángulo	67 – 85 (57 – 74)
III. Vectores y matrices (25 y *1 horas)	Vectores	86 – 116 (76 – 100)
	Vectores en el espacio	117 – 124 (101 – 106)
	Matrices	125 – 140 (107 – 122)
IV. Fundamentos de álgebra (7 horas)	Ecuaciones de las rectas	141 – 151 (124 – 131)
	Sistema de ecuaciones de primer grado en tres variables	152 – 153 (132 – 133)

Desarrollo de Clases



Fundamentos de aritmética y álgebra

1. Competencias de la Unidad

1. Utilizar el conjunto de los números reales, sus propiedades, operaciones y su aplicación práctica en la vida real.
2. Expresar números racionales en notación científica.
3. Resolver problemas de la vida real usando notación científica.
4. Resolver problemas de áreas y volúmenes que implique el uso de ecuaciones lineales.
5. Realizar despeje de fórmulas.
6. Resolver y aplicar ecuaciones cuadráticas en situaciones de la vida real.

2. Relación y Desarrollo

Matemática 7º

Variables y expresiones

Ecuaciones de primer grado en una variable.

Matemática 9º

Números Reales
- Raíz cuadrada
- Relación de orden con la raíz cuadrada
- Valor de la raíz cuadrada
- Números irracionales
- Números reales
- Operaciones con raíces cuadradas
- Racionalización (1 término en el denominador)

Matemática 8º

Funciones de primer grado
- Sistema de coordenadas cartesianas

Matemática I

Unidad I:
- Lección 1: Números reales
- Lección 2: Ecuaciones e inecuaciones
- Lección 3: Coordenadas planas

Matemática II

Unidad I: Funciones algebraicas
Unidad II: Funciones trascendentales

Matemática III

Unidad II: Geometría analítica

3. Plan de Estudio de la Unidad (29 horas)

Lección	Clase/hora	Contenidos	Términos y signos
1. Números reales (13 horas)	1, 2 y 3	Números racionales y reales	N ⊂ Z ⊂ Q R = Q ∪ I
	4	La recta numérica	
	5	Valor absoluto	$\lvert x\rvert$
	6 y 7	Raíz cuadrada	Raíz cuadrada, cantidad sub radical, índice; $\sqrt{x}$; $\sqrt{a^2} = \lvert a\rvert$;
	8 y 9	Cálculo con raíces cuadradas	$\sqrt{a}\ \sqrt{b}$; $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ Simplificación
	10	Racionalización del denominador	$\sqrt{a}+\sqrt{b}, -\sqrt{a}-\sqrt{b}\quad \sqrt{a}-\sqrt{b}$
	11 y 12	Intervalos	Intervalos reales Notación gráfica Notación de conjunto Notación de intervalo $[a, b]$, $]a, b[$, $[a, b[$, $]a, b]$, etc.
	13	Notación científica	$a \times 10^n$
		Ejercicios de la lección	
2. Ecuaciones e inecuaciones (13 horas)	1	Ecuaciones lineales	$ax + b = 0$; $a \neq 0$, a y $b \in$ R
	2	Despeje de fórmulas	
	3	Inecuaciones	$<$, $\leq$, $>$, $\geq$
	4	Propiedades de las desigualdades	
	5 y 6	Solución de inecuaciones lineales	
	7 y 8	Resolver problemas usando inecuaciones lineales	
	9	Sistemas de inecuaciones lineales en una variable	
	10 y 11	Ecuaciones de segundo grado	$ax^2 + bx + c = 0$; $a \neq 0$, a, b y $c \in$ R
	12 y 13	Fórmula cuadrática	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
3. Coordenadas planas (3 horas)	1	Coordenadas planas	Par ordenado (a, b) cuadrantes. ejes, abscisas, ordenadas
	2	Distancia entre dos puntos en el plano cartesiano desde el origen	Distancia entre dos puntos en la recta: $\lvert x_2 - x_1\rvert$
	3	Distancia entre dos puntos en el plano cartesiano	P(x_1, y_1), Q (x_2, y_2) PQ = $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
		Ejercicios de la lección	

Puntos de lección

Lección 1: Números reales

En esta unidad se estudia la formación del conjunto de los números reales, para ello es necesario analizar las características de cada conjunto, es decir, que el estudiante pueda identificar en una serie de números a que conjunto pertenecen, y comprender que los números reales se forman de la unión de los números racionales y los números irracionales (R = Q ∪ I).
En los números reales se cumplen varias propiedades, como la asociativa, distributiva, conmutativa, etc. estudiadas en las operaciones, sin embargo en este texto solo se tratará la propiedad de cierre, ya que se considera que las demás se han estudiado lo suficiente en los otros conjuntos de números.

Otro concepto que se estudia es el de raíz cuadrada, se repasará las propiedades entre ellas ($\sqrt{a}\ \sqrt{b} = \sqrt{ab}$; $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$) así como la simplificación de raíces, también se profundizará en la racionalización porque en noveno grado se trabajó solo con un término en el denominador, por lo que en esta lección se estudiará la racionalización aplicando el conjugado al denominador.

Una vez que los estudiantes son capaces de reconocer y trabajar con los números reales se le da paso a los intervalos reales que se representan en tres notaciones (gráfica, de conjunto e intervalo). En el texto se presenta una tabla resumen donde se puede visualizar los tipos de intervalos, es necesario que se estudien con detalle ya que serán necesarios para el estudio de las inecuaciones lineales y cuadráticas.

Otro contenido de suma importancia que se trata en esta lección es el de notación científica, donde se pretende que el estudiante aprenda a trabajar con cantidades muy grandes o muy pequeñas y poder expresarlas de la forma $a \times 10^n$, sin embargo no se abordan las operaciones (suma, resta, multiplicación y división) ya que en este momento no se consideran necesarios.

Lección 2: Ecuaciones e inecuaciones

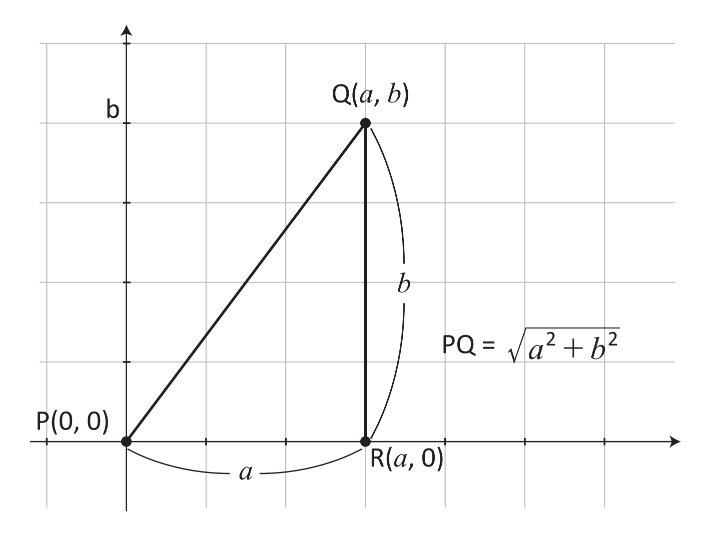
Las ecuaciones lineales se estudiaron en séptimo grado, en décimo se estudiarán todos los tipos a modo de repaso, se incluyen las ecuaciones donde algunos o todos los coeficientes son números decimales o fracciones con el propósito que conviertan dichos coeficientes en números enteros para facilitar los cálculos. En relación al despeje de fórmulas se hace hincapié en el despeje cuando la variable está en el denominador de la expresión.

El estudio de las inecuaciones incluye el uso de los cuatro símbolos de desigualdad: $<$, $\leq$, $>$ y $\geq$. Se representan gráficamente las propiedades de las desigualdades utilizando el hecho que en la recta numérica un número que está a la izquierda en menor a uno que está a la derecha, para un mejor entendimiento de los estudiantes. Se introducen la solución de inecuaciones lineales utilizando tablas con el propósito de crear en los estudiantes la necesidad de pensar en métodos más eficientes de encontrar su solución, por último como una solución común de dos inecuaciones lineales se estudian los sistemas de inecuaciones lineales en una variable.

Las ecuaciones de segundo grado se estudiaron en noveno grado por lo que en décimo grado se abordarán también como un repaso, se inicia probando con ciertos valores en la ecuación (sustituyéndolos en la ecuación) para crear cierta incomodidad en los estudiantes, esto con el objeto de llegar a la solución de ecuaciones cuadráticas por los métodos convencionales: factorización y fórmula cuadrática.

Lección 3: Coordenadas planas

En octavo grado se estudió la unidad de función lineal y dentro de esta se aborda el plano cartesiano, por lo que los estudiantes ya han tenido experiencia graficando puntos e identificando coordenadas de puntos en el sistema de coordenadas cartesianas. En esta lección se retoma el plano cartesiano (clase 1) como un repaso, para luego poder desarrollar el tema de la distancia entre dos puntos en un sistema de coordenadas cartesianas, inicialmente se comienza dando un punto y el origen, con el propósito que formen un triángulo rectángulo, y conociendo las medidas de sus catetos poder encontrar la hipotenusa mediante el teorema de Pitágoras y esta medida se le conoce como la distancia entre el punto dado y el origen.



Esta idea se traslada para encontrar la distancia entre dos puntos cualesquiera en el plano cartesiano, lo que permitirá deducir la fórmula de la distancia de dos puntos P(x_1, y_1),Q(x_2, y_2) PQ = $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

Este tema será necesario en contenidos de Matemática III cuando se estudian las secciones cónicas.

Unidad I. Lección 1.

Clase 1

(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: **[A]** Definir el conjunto de los números Naturales ($\mathbb{N}$), enteros ($\mathbb{Z}$) y racionales ($\mathbb{Q}$).

Evaluación: [A] Ejercicio 1.1, 1.2.

Desarrollo de Clases

[A]
Definir conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$


Ejemplo 1.1
(5 min)
*Presentar los ejercicios en la pizarra y tomar en cuenta la participación de los estudiantes
* Tome en cuenta que estos contenidos los estudiantes lo trabajaron en séptimo grado y en noveno por lo que se debe aprovechar sus conocimientos previos ya que esto solo es un repaso por lo que no se debe invertir mucho tiempo en ello.

Definición 1.1. (3 min)


Ejemplo 1.2
(5 min)
*Utilice la misma estrategia anterior para definir los números enteros, haciendo uso de algunas operaciones que no se pueden hacer en los naturales.

Lección 1. Números reales

Clase 1, 2 y 3. Números racionales y reales

Ejemplo 1.1. Qué tipo de número utilizamos para representar las siguientes situaciones. Escriba el número con la que se representa cada una de ellas:
a) Número de estudiantes en el aula de clase
b) Cantidad de profesores en el instituto
c) El número de computadoras en el laboratorio de computo
d) Número de miembros de su familia
Solución:
El tipo de números que se utiliza son números enteros positivos.
Cuando se tienen situaciones que se pueden representar solo con números enteros positivos utilizamos el conjunto de números naturales

[A]

Definición 1.1
El conjunto de los números naturales son los números que se utilizan para contar, se representan con la letra $\mathbb{N}$.
$\mathbb{N}$ = {1,2 ,3 ,4 ,...,}

Los números naturales surgen por la necesidad del hombre de ordenar y saber la cantidad de elementos en un conjunto.

$\mathbb{N}$ es un conjunto infinito y cada número tiene sucesor.

Los números naturales nos permiten contar elementos de un conjunto, por lo que cuando se realizan operaciones con ellos se puede dar el caso que los resultados sean números naturales o no.
- Si se suman dos números naturales el resultado es un numero natural
- Si se multiplican dos números naturales, el resultado es un numero natural
- Si se restan dos números naturales el resultado ¿será siempre un numero natural?

De aquí surge otro conjunto que se le llama conjunto de números enteros.

3 – 5 = ? ¿Es un número natural?

Ejemplo 1.2. Represente las siguientes situaciones utilizando números
a) 5°C bajo cero
b) 15 Km al oeste
c) 30 minutos antes de ahora
d) Deuda de 35 lempiras
e) 8 metros de profundidad bajo el nivel del mar
Solución: a) –5 b) –15 c) –30 d) –35 e) –8

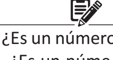
Hay situaciones que no se pueden representar con los números naturales por lo que se hace uso de los enteros negativos.
Número negativo: son números que son menores que cero.

Definición 1.2
El conjunto de números enteros se representa por la letra Z y consiste en los enteros positivos, el número cero y los enteros negativos.



Números positivos: son números que son mayores que cero.

$\mathbb{Z}$ = {..., –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, ...,}
$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+$



3 ÷ 5 = ? ¿Es un número natural?, ¿Es un número entero?

* Al dividir dos números naturales ¿el resultado siempre será un número natural?

2 | Unidad I • Lección 1 • Clase 1, 2 y 3. Números racionales y reales

Definición 1.2. (3 min)
*Indicar que la unión de los números enteros positivos, el cero y los números enteros negativos forman el conjunto de los números enteros y este se representa por $\mathbb{Z}$.

*Concluir que todo número natural es un número entero.

Clase 1

(Continuación)

(Continúa en la siguiente página)

Se sabe que no siempre es posible porque hay divisiones que no son exactas, por lo que se tiene otro conjunto de números llamado el conjunto de números racionales.

 **Ejemplo 1.3.** Represente con números las siguientes situaciones:

a) La mitad de un lempira
b) Repartir tres galletas entre cuatro amigos
c) Repartir 8 confites entre dos amigos
d) La tercera parte de una docena de huevos
e) Repartir un pastel de forma equitativa entre 5 amigos

Solución: a) $\frac{1}{2}$ ó 0.50 b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{8}{2}$ ó 4 d) $\frac{12}{3}$ ó 4 e) $\frac{1}{5}$

Algunas divisiones son exactas, por lo que los números enteros también son números racionales.



Todo número entero puede ser representado como una fracción

$-3 = \frac{-3}{1}, \frac{-6}{2}, \frac{-9}{3}, \ldots,$

$4 = \frac{4}{1}, \frac{8}{2}, \frac{12}{3}, \frac{16}{4}, \ldots,$

Todo número entero es racional: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$



Definición 1.3

Los números racionales se representan por la letra $\mathbb{Q}$ y consiste en los números que se escriben de la forma $\frac{a}{b}$ donde a y b son números enteros y $b \neq 0$

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$

 **Ejercicio 1.1.**

a) Dados los siguientes números escríbalos en forma de fracción.

$a_1)$ −5 $a_2)$ 2 $a_3)$ −8 $a_4)$ 7

b) Represente las siguientes situaciones utilizando números

$b_1)$ Una deuda de 1000 lempiras
$b_2)$ 8°C bajo cero
$b_3)$ 7 metros sobre el nivel del mar
$b_4)$ 15 minutos después de ahora
$b_5)$ 400 lempiras de préstamo
$b_6)$ 80 metros de velocidad por minuto hacia el norte
$b_7)$ Juan ganó 1300 lempiras
$b_8)$ La mitad de cinco
$b_9)$ Repartir 3 pasteles entre 5 personas
$b_{10})$ Dos quintos de ciento cincuenta

Ejemplo 1.4. Se tienen 6 barras rectangulares de chocolate y se quieren repartir entre 12 personas ¿cuánto chocolate le toca a cada persona?

Solución:

$$\frac{6}{12} \overset{\div 2}{=} \frac{3}{6} \overset{\div 3}{=} \frac{1}{2}$$

A cada persona le corresponde $\frac{1}{2}$ de la barra de chocolate.

$\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ Al simplificar la fracción a su mínima expresión se le conoce como fracción simplificada. $\frac{1}{2}$ es la fracción sinplificada de $\frac{6}{12}$.

Unidad I • Lección 1 • Clase 1, 2 y 3. Números racionales y reales | 3

Ejemplo 1.4

(4 min)

*Hacer un recordatorio de la simplificación de fracciones ya que esto será necesario en los contenidos posteriores.

Ejemplo 1.3

(5 min). Presentar las situaciones que no se pueden expresar con números naturales y enteros y permitir que los estudiantes propongan soluciones.

Definición 1.3. (3 min)

Indicar que la unión de las fracciones positivas, cero y fracciones negativas forman el conjunto de los números racionales.
Este conjunto se representa con la letra Q.

*Concluir que todo número natural, entero es racional.

Ejercicio 1.1

(10 min) Soluciones

a) $a_1)\ -\frac{10}{2}$ $a_2)\ \frac{2}{1}$

$a_3)\ -\frac{8}{1}$ $a_4)\ \frac{14}{2}$

b) $b_1)$ −1000 $b_2)$ −8

$b_3)$ +7 $b_4)$ +15

$b_5)$ −400 $b_6)$ +80

$b_7)$ +1300 $b_8)\ \frac{5}{2}$

$b_9)\ \frac{3}{5}$

$b_{10})\ \frac{2}{5}$ x 150

Unidad I. Lección 1.

Clase 1
(Continuación)

Clase 2
(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: **[B]** Clasificar los tipos de decimales en exactos, periódicos puros y mixtos.

Evaluación: Ejercicio 1.3

Definición 1.4. (3 min)
*Concluir que una fracción en su minina expresión es una fracción simplificada.



Ejercicio 1.2
(4 min)
*Se puede asignar de tarea en el caso que el tiempo no sea suficiente.
Soluciones:

a) $\frac{2}{7}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{8}{9}$

d) $-\frac{7}{9}$ e) $-\frac{1}{6}$ f) $1\frac{5}{9}$

g) $-3\frac{1}{2}$

[Hasta aquí clase 1]

[Desde aquí clase 2]

[B]



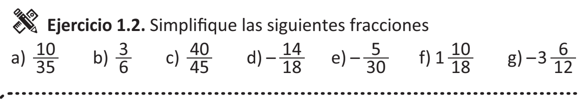
Ejemplo 1.5
(15 min) *Tener en cuenta que los estudiantes han trabajado con números decimales desde 5to grado, por lo que en este caso se debe aprovechar sus conocimientos para hacer la clasificación de los decimales.

Concluir en los tipos de decimales que se pueden tener.
M ¿Cuándo un decimal será exacto?
M: ¿Cuándo un decimal es periódico puro?

En los números reales se puede tener fracciones que no estén simplificadas como ser: $\frac{4}{8}$, $\frac{5}{20}$, $\frac{12}{3}$, $\frac{18}{2}$, $-\frac{100}{25}$, $-\frac{84}{12}$

Definición 1.4
Una fracción simplificada es la fracción que está escrita en su mínima expresión es decir que no hay ningún divisor común entre el numerador y el denominador. A este tipo de fracción se llama irreductible.

Las fracciones reductibles e irreductibles son números racionales.



Ejercicio 1.2. Simplifique las siguientes fracciones
a) $\frac{10}{35}$ b) $\frac{3}{6}$ c) $\frac{40}{45}$ d) $-\frac{14}{18}$ e) $-\frac{5}{30}$ f) $1\frac{10}{18}$ g) $-3\frac{6}{12}$

Ejemplo 1.5. Convierta las siguientes fracciones a números decimales
a) $\frac{5}{4}$ b) $-\frac{3}{5}$ c) $\frac{7}{3}$ d) $-\frac{5}{9}$ e) $-\frac{5}{22}$ f) $\frac{7}{6}$

Solución: Para convertir una fracción a número decimal se divide el numerador por el denominador.

a) $\frac{5}{4} = 1.25$ (5 ÷ 4 = 1.25; 4, 10, 8, 20, 20, 0)

b) $-\frac{3}{5} = -0.6$ (3 ÷ 5 = 0.6; 30, 0)

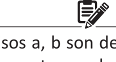
c) $\frac{7}{3} = 2.\overline{3}$ (7 ÷ 3 = 2.333…; 6, 10, 9, 10, 9, 10)

d) $-\frac{5}{9} = -0.\overline{5}$ (5 ÷ 9 = 0.555…; 45, 50, 45, 50, 45)

e) $-\frac{5}{22} = -0.2\overline{27}$ (5 ÷ 22 = 0.22727…; 44, 60, 44, 160, 154, 60, 44, 160)

f) $\frac{7}{6} = 1.1\overline{6}$ (7 ÷ 6 = 1.166; 6, 10, 6, 40, 36, 40, 36, 4)

[B]



Los incisos a, b son decimales exactos c y d se les llama decimal periódico puro, e y f se les llama decimal periódico mixto

Los números decimales se pueden clasificar en:
Decimales finitos: son aquellos números que tienen fin; es decir un número limitado de cifras decimales. Dentro de los decimales finitos tenemos:
Decimal exacto: son aquellos decimales cuya parte decimal tiene un número finito de cifras.

Los números decimales que son exactos periódicos puros y mixtos son números racionales.

4 | Unidad I • Lección 1 • Clase 1, 2 y 3. Números racionales y reales

M: ¿Cuándo un decimal es periódico mixto?
*Este conocimiento se debe aprovechar para analizar el comportamiento de los números, ya que existen fracciones que al dividir el numerador y el denominador da como resultado un numero entero.

Clase 2

(Continuación)

(Continúa en la siguiente página)

Decimales infinitos: son aquellos números que tienen un número ilimitado de cifras decimales dentro de los decimales infinitos se tiene:
Decimal periódico: son aquellos decimales cuya parte decimal tiene un número infinito de cifras que se repiten siguiendo un patrón llamado periodo.

Hay dos tipos de decimales periódicos
a) **Periódico puro:** cuando el periodo comienza inmediatamente después del punto decimal.
b) **Periódico mixto:** cuando el periodo comienza después del ante período.



Todo número decimal que se pueda expresar como una fracción con denominador 10 ó potencia de 10 es un número racional.

Anteperíodo son números que no se repiten mediante un patrón.

Ejercicio 1.3. Convierta las siguientes fracciones a decimales y exprese ¿Qué tipo de número decimal es?
a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{12}{5}$ c) $\frac{13}{6}$ d) $\frac{19}{7}$ e) $-\frac{22}{5}$ f) $\frac{17}{12}$

Ejemplo 1.6. Escriba dos fracciones diferentes para expresar los siguientes números:
a) -8 b) 4 c) $\sqrt{2}$ d) $-\sqrt{7}$

Solución: a) -8: $-\frac{8}{1}, -\frac{16}{2}$ b) 4: $\frac{8}{2}, \frac{12}{3}$

$\sqrt{2}$ y $-\sqrt{7}$ no se pueden expresar como una fracción cuyo numerador y denominador sean número enteros, por lo que $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{7}$ no son números racionales.

$\sqrt{2}$ y $-\sqrt{7}$ en su forma decimal

$\sqrt{2} = 1.4142163562...$
$-\sqrt{7} = -2.645751311...$
} son decimales infinitos no periódicos

A este tipo decimal se le llama número irracional.



En octavo grado se estudiaron las raíces cuadradas.



En $\mathbb{I}$ se encuentran todas las raíces inexactas. Un número racional no puede ser un número irracional.

Definición 1.5
Números irracionales son los números que tienen infinitas cifras decimales no periódicas, no se pueden expresar como una fracción. Este conjunto se representa con la letra $\mathbb{I}$.
$\mathbb{I}$ = {Todos los números decimales no periódicos}

Ejercicio 1.4. Determine a que conjunto pertenece cada uno de los siguientes números:

Número	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{I}$	$\mathbb{R}$
-7					
$\sqrt{5}$					
$\frac{12}{3}$					
1.6					
5					
$4.3\overline{21}$					

Número	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{I}$	$\mathbb{R}$
π					
$\frac{6}{5}$					
$\frac{8}{2}$					
$-\frac{15}{3}$					
$\sqrt[3]{6}$					
$\sqrt[5]{32}$					



Ejercicio 1.3
(7 min) Solución
a) $0.\overline{6}$ PP.
b) 2.4 E.
c) $2.1\overline{6}$ P.M.
d) $2.\overline{714285}$ P.P.
e) –4.4 E.
f) $1.41\overline{6}$ P.M.

Ejemplo 1.6
(7 min)
*Presentar los ejercicios en la pizarra y dejar que los estudiantes lo intenten.
M: ¿Encontraron fracciones para representar $\sqrt{2}$ y $\sqrt{7}$?
RP: no

Concluir que $\sqrt{2}$ y $\sqrt{7}$ son números irracionales.

Definición 1.5. (3 min)
Concluir que los números irracionales son decimales infinitos no periódicos.
Los números irracionales se representan con la letra $\mathbb{I}$.

Ejercicio 1.4
(13 min)
Solución en pág. 25

*Es de suma importancia que los estudiantes dominen las características de cada conjunto de números, a la vez que pueda identificar dado un arreglo de números a que conjunto pertenece, ya que esto le será util al momento de trabajar con ellos.

[Hasta aquí clase 2]

Unidad I. Lección 1.

Clase 3

(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: **[C]** Definir el conjunto de números reales representan el conjunto de números reales mediante un diagrama de Venn.
[D] Definir la propiedad de cierre en los números reales.

Evaluación: [C] Ejercicio 1.5, [D] Ejercicio 1.6 , 1.7.

[Desde aquí clase 3]

[C]

Ejemplo 1.7

(5 min)
M: ¿Qué números son racionales?
RP: 3, 0.2, $\frac{8}{3}$, $\sqrt{36}$, –0.5, $\frac{9}{100}$
M: ¿Que números pertenecen al conjunto de los números irracionales?

RP: $\sqrt{2}$, $-\sqrt{12}$, π, $\sqrt{8}$, $\sqrt{21}$
Concluir que todos los números juntos pertenecen al conjunto de números reales.

Definición 1.6. (3 min)
*Concluir que los números reales están formados por la unión de los números racionales e irracionales.

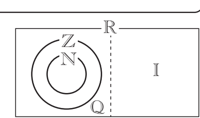
Los números reales se representan con $\mathbb{R}$.

Ejemplo 1.7. Determine cuáles de los números son racionales y cuales son irracionales.
3, $\sqrt{2}$, 0.2, $\frac{8}{3}$, $-\sqrt{12}$, π, $\sqrt{36}$, −0.5, $\frac{9}{100}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{21}$
Solución:
Racionales: 3, 0.2, $\frac{8}{3}$, $\sqrt{36}$, −0.5, $\frac{9}{100}$
Irracionales: $\sqrt{2}$, $-\sqrt{12}$, π, $\sqrt{8}$, $\sqrt{21}$
$\left\{3, 0.2, \frac{8}{3}, \sqrt{36}, -0.5, \frac{9}{100}, \sqrt{2}, -\sqrt{12}, \pi, \sqrt{8}, \sqrt{21}\right\}$ son números reales.

[C]

Definición 1.6
El conjunto de los números reales es la unión de los números racionales y los números irracionales. Se representan por la letra $\mathbb{R}$ y corresponden a todos los puntos en la recta numérica.

La relación entre los conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$ se denota en el siguiente diagrama.



$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.
Todo número entero y natural es racional pero no todo racional es natural y entero.

Ejercicio 1.5. ¿A cuál conjunto pertenecen los siguientes números? $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$ ó $\mathbb{R}$?
a) 9 b) $\frac{13}{6}$ c) $\sqrt{6}$ d) $-\frac{2}{5}$ e) 0.2166666...
f) $\frac{17}{12}$ g) −5 h) $2+\sqrt{2}$ i) $\frac{12}{4}$ j) $-\frac{25}{5}$

Ejemplo 1.8. Resuelva las siguientes operaciones

[D]

a) $\frac{7}{2} - \frac{5}{4}$
Solución:
$= \frac{14}{4} - \frac{5}{4}$ fracciones con un denominador común (mcm)
$= \frac{9}{4}$ → es un número racional y real

b) $2 + 5\sqrt{2} - \left\{\frac{2}{3} + 4\sqrt{2} - \frac{1}{6}\right\}$
Solución:
$2 + 5\sqrt{2} - \frac{2}{3} - 4\sqrt{2} + \frac{1}{6}$
$(2 + \frac{1}{6} - \frac{2}{3}) + (5\sqrt{2} - 4\sqrt{2})$ agrupando términos semejantes
$\frac{3}{2} + \sqrt{2}$ → es un número irracional y real

Al sumar o restar dos o más números reales el resultado será un número real

6 | Unidad I • Lección 1 • Clase 1, 2 y 3. Números racionales y reales

---

Ejercicio 1.5

(5 min) Solución:
a) $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ b) $\mathbb{Q}$,$\mathbb{R}$ c) $\mathbb{I}$, $\mathbb{R}$
d) $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e) $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ f) $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$
g) $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ h) $\mathbb{I}$, $\mathbb{R}$ i) $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$
j) $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$

[D] Propiedad de cierre

Ejemplo 1.8. (10 min)

*Verificar la propiedad de cierre en los números reales utilizando las operaciones básicas.

Clase 3
(Continuación)

Ejercicio 1.6. Resuelva los siguientes ejercicios

a) $3.2 + 1.4$ b) $\frac{1}{2} + \frac{2}{3}$ c) $-11.2 + 3.5$

d) $2 - \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{4}\right)$ e) $-3\sqrt{2} - 4\sqrt{3} + 4\sqrt{2} + 7\sqrt{3}$

Ejemplo 1.9. Resuelva:

a) -9×40 b) $\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{8}{3}\right)$ c) $2\sqrt{3}\,(-5\sqrt{6})$ d) $-184 \div 23$

Solución:

a) $-9 \times 40 = -360$ ⟶ número racional y real

b) $\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{8}{3}\right)$

$= -\frac{8}{6}$

$= -\frac{4}{3}$ ⟶ número racional y real

c) $2\sqrt{3}\,(-5\sqrt{6})$

$= -10\sqrt{3 \times 6}$

$= -10 \times 3\sqrt{2}$

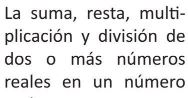
$= -30\sqrt{2}$ ⟶ número irracional y real

d) $-184 \div 23$

$= -8$

Al multiplicar o dividir dos números reales el resultado será un número real





Del Ejemplo 1.8 y 1.9 se infiere la siguiente propiedad de cierre o clausura.

Definición 1.7

Si a y b son números reales entonces:

$a + b$, $a - b$, $a \cdot b$ y $a \div b$ son números reales.

Es decir $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$ y $a \div b \in \mathbb{R}$

Ejercicio 1.7. Resuelva

a) $-5 \times 4 \div 10$

b) $\frac{4}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) \div \frac{1}{5}$

c) $2\sqrt{7}\,(3 + \sqrt{5})$

Unidad I • Lección 1 • Clase 1, 2 y 3. Números racionales y reales | 7

Ejercicio 1.6
(10 min) Solución

a) 4.6

b) $\frac{7}{6}$

c) -7.7

d) $\frac{11}{8}$

e) $\sqrt{2} + 3\sqrt{3}$

Resolver a) y b) el resto asignar de tarea.

Ejemplo 1.9
(15 min)

*Presentar en la pizarra el ejemplo y concluir en la propiedad de cierre en los números reales.

Definición 1.7
(2 min)

Ejercicio 1.7
Asignar como tarea

Solución:

a) -2

b) -5

c) $6\sqrt{7} + 2\sqrt{35}$

Unidad I. Lección 1.

Clase 4 (1 hora)

Objetivo: **[A]** Representar números reales en la recta numérica.

Evaluación: Ejercicio 1.8.

[A]

Ejemplo 1.10
(25 min)

*Dado el subconjunto de números reales pedir a los estudiantes que los grafiquen en la recta numérica.

*Recordar la manera de graficar fracciones (propias, impropias y mixtas) y decimales ya que esto se estudió en años anteriores.

*Concluir que los números reales completan la recta numérica y por lo tanto se le llama recta numérica real.

Definición 1.18
(5 min)
Concluir que a todo número real le corresponde un punto en la recta numérica y viceversa.

Ejercicio 1.8
(15 min) Solución:

Clase 4. La recta numérica

Ejemplo 1.10. Represente en la recta numérica los siguientes números.
$\{-2, 0, \sqrt{3}, -1.4, \sqrt{7}, \frac{1}{3}, -\frac{7}{2}\}$
Solución:
Para graficar las raíces inexactas: $\sqrt{3}$ y $\sqrt{7}$ en la recta numérica se utiliza una aproximación decimal
$\sqrt{3} = 1.732050808...$ $\sqrt{7} = 2.645751311...$
$\sqrt{3} \approx 1.7$ $\sqrt{7} \approx 2.6$

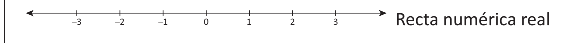


recta numérica real

En la recta numérica real se pueden representar números naturales, enteros, racionales e irracionales.

- Para representar números naturales o enteros basta con ubicar el punto sobre el número que se desea representar
- Para representar números racionales:
  Fracciones: si la fracción es propia quedará ubicada entre 0 y 1 si es positiva o entre 0 y –1 si es negativo, si la fracción es mixta se toman las unidades del número entero y luego en la unidad contigua posterior se ubica la fracción propia
  Decimales: para representar decimales se utilizan aproximaciones a décimas.
- Para representar números irracionales, de igual manera que los números decimales se usan aproximaciones a décimas.

Definición 1.8
La recta numérica real es una representación gráfica del conjunto de números reales, tiene su origen en el cero y se extiende infinitamente en ambas direcciones los números positivos hacia la derecha y los números negativos hacia la izquierda.

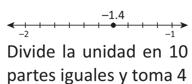

Recta numérica real

Ejercicio 1.8. Grafique en la recta numérica real los siguientes valores
a) $\left\{\frac{2}{3}, -\frac{5}{4}, \frac{7}{4}, -2\frac{1}{3}, \frac{9}{3}\right\}$
b) $\{2.5, 0, -0.8, 1.43, -3.78, -1.\overline{6}\}$
c) $\{\sqrt{5}, \sqrt{8}, -\sqrt{3}, -\sqrt{7}\}$
d) $\left\{-1, \sqrt{6}, \frac{4}{3}, -\frac{1}{4}, 0.5, \frac{12}{3}\right\}$
e) $\left\{\pi, \sqrt{11}, -3, \sqrt{4}, -\frac{8}{2}, \frac{1}{7}\right\}$

[A]



Los números reales completan la recta numérica.
Graficar –1.4

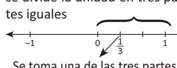


Divide la unidad en 10 partes iguales y toma 4



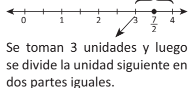
Fracción propia $\frac{a}{b}$, $a < b$
Impropia $\frac{a}{b}$, $a > b$
Número mixto es de la forma $a\frac{b}{c}$, donde a es un entero y $\frac{b}{c}$ una fracción propia.

Fracción propia: $\frac{1}{3}$
se divide la unidad en tres partes iguales



Se toma una de las tres partes.

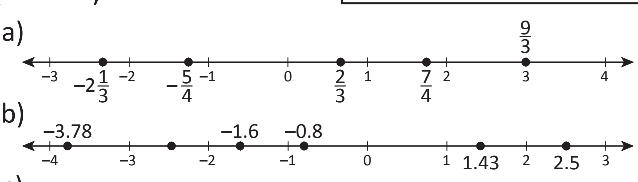
Fracción impropia:
$\frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$

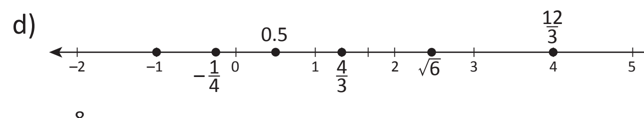


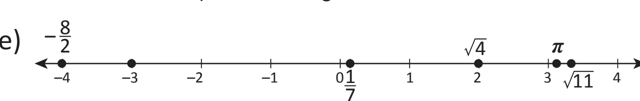
Se toman 3 unidades y luego se divide la unidad siguiente en dos partes iguales.

A todo número real le corresponde un punto en la recta numérica real y viceversa.
Al ubicar números reales en la recta numérica podemos determinar cuál es mayor o menor.

En Ejercicio 1.8, para cada inciso haga una recta numérica.







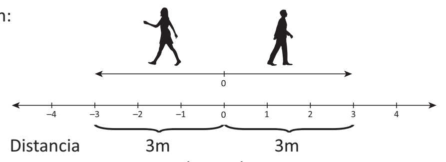
Objetivo: **[A]** Encontrar el valor absoluto de un número real

Evaluación: Ejercicio 1.9, 1.10

Unidad I. Lección 1.
Clase 5
(Continúa en la siguiente página)

Clase 5. Valor absoluto

Ejemplo 1.11. Carlos y María corrieron en una maratón, Carlos corrió 3 metros hacia el este y María corrió 3 metros hacia el oeste ¿Quién corrió más?
Solución:



La distancia que recorrieron ambos es la misma.
Para representar distancias entre el cero y un punto en la recta numérica se utiliza valor absoluto del número y este se indica colocando el número entre dos barras
$|3| = 3$ $|-3| = 3$

[A]

3 metros al este es +3
3 metros al oeste es −3
3 y −3 estan a la misma distancia de 0 en la recta numérica.
La distancia nunca es negativa por lo que el valor absoluto de un número nunca es negativo.

Definición 1.9. Valor absoluto
Es la distancia entre un número y cero en la recta numérica y este se define como: Sea x un número real

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Ejercicio 1.9. Encuentre:
a) $|-8|$ b) $|-5|$ c) $-|-3|$ d) $|1.4|$
e) $|-2.6|$ f) $|-\frac{2}{3}|$ g) $-|-\frac{1}{5}|$ h) $-|5|$

Ejemplo 1.12. Elimine las barras de valor absoluto de los siguientes números aplicando la definición.
a) $|-8|$ b) $-|-4|$
Solución: aplicando la definición
a) $|-8| = -(-8) = 8$ $-8 < 0$ por lo que $|x| = -x$ si $x < 0$; $|-8| = -(-8)$
b) $-|-4| = -4$ $-4 < 0$ por lo que $|-4| = -(-4) = 4$

- Si x es un número positivo ó 0 entonces el valor absoluto es el mismo x, sin embargo, si x es un número negativo, entonces su valor absoluto es el inverso aditivo de x.

[B]

En b) como el signo está fuera de las barras del valor absoluto este se copia: $-[-(-4)] = -4$.

Ejercicio 1.10. Simplifique lo siguiente eliminando los símbolos de valor absoluto.
a) $|3|$ b) $|-7|$ c) $-|6|$ d) $-|2-4|$
e) $|12-5|$ f) $|-(3-1)|$ g) $|-\frac{12}{5}|$ h) $|-1.9|$
i) $-|-(5-2)|$ j) $|-\frac{2}{3} - \frac{1}{4}|$ k) $|2.5-3|$ l) $-|-7.2-8.3|$

Unidad I • Lección 1 • Clase 5. Valor absoluto | 9

[A]


Ejemplo 1.11
(10 min)
Presentar en la pizarra el ejemplo
M: ¿Cuántos mts recorrió Carlos?
M: ¿Cuántos mts recorrió María?
RP: 3
M: Quien corrió más?
RP: ninguno ambos corrieron lo mismo
Concluye que como se trata de distancia ambos se representan con + 3 y para ello se utiliza valor absoluto

Definición 1.9. (5 min)


Ejercicio 1.9
(10 min) Solución:
a) 8 b) 5 c) −3
d) 1.4 e) 2.6 f) $\frac{2}{3}$
g) $-\frac{1}{5}$ h) −5

[B]


Ejemplo 1.12
(10 min)
*Aplicar la definición de valor absoluto para encontrar el valor absoluto de −8.
*Hacer énfasis que si el signo negativo está dentro de las barras entonces al aplicar la definición este será positivo pero si esta fuera de las barras esto no aplica, se copia el signo tal cual
$(|-4| = 4.\ -|-4| = -4.\ -|4| = -4)$.

Ejercicio 1.10
(10 min)
Solución en pág. 25

Unidad I. Lección 1.
Clase 6

(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: **[A]** Calculan la raíz cuadrada de un número real positivo.

Evaluación: Ejercicio 1.11.

[A]



Ejemplo 1.13
(10 min)
*Presentar el problema en la pizarra y hacer preguntas para llegar a resolver la raíz cuadrada.
M: ¿Qué nos piden encontrar en el problema?
RP: El lado de un cuadrado
M: Cual es la fórmula para encontrar el área de un cuadrado?
RP: A = L^2

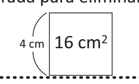
Concluye para obtener el lado del cuadrado se aplica raíz cuadrada en ambos lados de la igualdad, por lo que
16 = L^2 entonces L = 4.

*Recordar con los estudiantes que el concepto de raíz cuadrada se estudió en 8vo grado

Definición 1.10. (5 min)
Concluir que un número real positivo tendrá dos raíces cuadradas, una positiva y la otra negativa ($\sqrt{a} = \pm\sqrt{a}$).

Clase 6 y 7. Raíz cuadrada

Ejemplo 1.13. Encuentre el lado de un cuadrado que tiene como área 16 cm²
Solución:
El área de un cuadrado está dada por la fórmula: A = ℓ^2
Para obtener el lado del cuadrado tenemos:
16 = ℓ^2
$\sqrt{16} = \sqrt{\ell^2}$ ⟶ aplicar la raíz cuadrada para eliminar la potencia
$\ell = \pm 4$
El lado del cuadrado es 4



[A]



16 = 4 × 4

En la solución solo se toma el número positivo porque se trata del lado de un cuadrado.
Partes de una raíz:
$\sqrt{a} = b$
*índice: 2
Cuando se trata de raíces cuadradas no es necesario colocar el índice.
*Cantidad subradical: a
*Raíz: b

Definición 1.10. Raíz cuadrada
Si a es un número no negativo, la raíz cuadrada de a, es un número b tal que $b^2 = a$; la raíz cuadrada de a se denota por $\sqrt{a}$.

Observa:
$\sqrt{16} = +4$ y $\sqrt{16} = -4$ porque $4 \times 4 = 16$ y $-4 \times -4 = 16$

Un número real positivo a tendrá dos raíces cuadradas una positiva y otra negativa, por ejemplo $\sqrt{16} = \pm 4$.

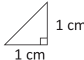


La radicación es la operación inversa a la potenciación. Por lo tanto, se puede expresar de la forma:
$b^2 = a$
$\sqrt{0} = 0$ cero solo tiene una raíz cuadrada.

Ejercicio 1.11. Encuentre las raíces cuadradas de:

a) 36 b) 144 c) 25 d) $\frac{4}{9}$ e) 1.44
f) 0.04 g) $\frac{16}{9}$ h) 81 i) $\frac{1}{4}$ j) 10.24

Ejemplo 1.14. Encuentre la hipotenusa del siguiente triangulo rectángulo aplicando el teorema de Pitágoras.



Solución:
Al aplicar el teorema de Pitágoras se sabe que la hipotenusa está dada por la siguiente fórmula
$c = \sqrt{a^2 + b^2}$
$c = \sqrt{1^2 + 1^2}$
$c = \sqrt{2}$
Por tanto, la medida de la hipotenusa es $\sqrt{2}$

- La raíz cuadrada de un número real a positivo no siempre será un número entero o racional también tenemos raíces cuadradas que pertenecen al conjunto de los números irracionales.
  Por tanto, se puede concluir que:

[B]



En el triángulo rectángulo c es hipotenusa, a y b son catetos.
$c = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\sqrt{2}$ es un número irracional
$\sqrt{2} = \pm\sqrt{2}$ es decir que la raíz cuadrada de 2 es $-\sqrt{2}$ y $+\sqrt{2}$



No se puede calcular las raíces cuadradas de números negativos.

10 | Unidad I • Lección 1 • Clase 6 y 7. Raíz cuadrada

Ejercicio 1.11. (10 min) Solución:

a) ±6 b) ±12 c) ±5 d) $\pm\frac{2}{3}$ e) ±1.2
f) ±0.2 g) $\pm\frac{4}{3}$ h) ±9 i) $\pm\frac{1}{2}$ j) ±3.2

Objetivo: **[C]** Definir la raíz cuadrada de un número real positivo.

Evaluación: Ejercicio 1.9, 1.10

Unidad I. Lección 1.

Clase 6

(Continuación)

Clase 7

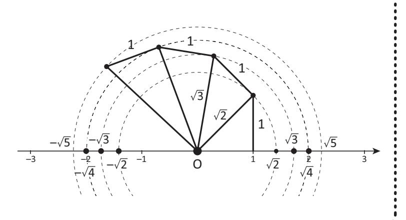
$\sqrt{a} = b$ si y solo si $b^2 = a$, $a \geq 0$. Al número a se le llama radicando o cantidad sub radical y al número b se le llama raíz cuadrada de a.

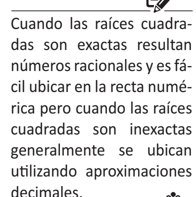
Ejercicio 1.12. Exprese los siguientes números con el signo radical ($\sqrt{\ }$). Ejemplo $\sqrt{3}$.

a) 3 b) 7 c) 0.5 d) 1.9 e) 1.8

Ejemplo 1.15. Represente en la recta numérica los siguientes números $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$

Solución:
Cuando las raíces cuadradas son números irracionales se pueden utilizar el siguiente método para detener una mejor aproximación. (Ver la columna)





Ejercicio 1.13. A partir de la gráfica del Ejemplo 1.15 grafique.

a) $\sqrt{5}$ b) $\sqrt{6}$

Ejemplo 1.16. Dado el valor de a represente $\sqrt{a^2}$

$a = 5$, $a = -5$

Solución:

$a = 5$ $\sqrt{5^2} = \sqrt{25} = 5$

$a = -5$ $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$

De lo que surge la siguiente propiedad:

Sea a un número real si se tiene $\sqrt{a^2} = |a|$

Ejemplo 1.17. Encontrar la raíz cuadrada de: $\sqrt{(2-x)^2}$ si $2 - x < 0$

Solución:
Aplicando la propiedad se tiene:

$\sqrt{(2-x)^2} = |2 - x|$
$= -(2 - x)$
$= x - 2$

Ejercicio 1.14. Encuentre el valor de los siguientes números

a) $\sqrt{(10)^2}$ b) $-\sqrt{36}$ c) $(\sqrt{8})^2$ d) $\left(-\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^2$ e) $(-\sqrt{21})^2$

f) $\sqrt{\left(\frac{6}{5}\right)^2}$ g) $\sqrt{(-7)^2}$ h) $\sqrt{(3-\pi)^2}$ si $3 - \pi < 0$ i) $\sqrt{(a-3)^2}$ si $a - 3 < 0$

$\sqrt{4} \neq -2$ porque
$(-2)(-2) \neq -4$
No existe ningún número real que al elevarlo al exponente 2 resulte la cantidad subradical negativa. Sin embargo $-\sqrt{4} \neq \sqrt{-4}$
$-\sqrt{4} = -2$

[C]

Cuando las raíces cuadradas son exactas resultan números racionales y es fácil ubicar en la recta numérica pero cuando las raíces cuadradas son inexactas generalmente se ubican utilizando aproximaciones decimales.

***Pasos para graficar las raíces**

1. Comenzar ubicando $\sqrt{2}$ como el lado de un triángulo rectángulo cuyos catetos son: 1.
   $\sqrt{2} = \sqrt{1^2 + 1^2}$
2. Con el compás hacer la abertura del tamaño de la hipotenusa y trazar un arco que cruce la recta en el lado positivo y en el lado negativo. Ubicar $-\sqrt{2}$ y $\sqrt{2}$
3. Trazar un segmento perpendicular a la hipotenusa del triángulo con medida de 1cm y luego unir el otro extremo con el punto cero de la recta numérica y luego repetir el paso 2 con el otro triángulo formado y ubica $\sqrt{3}$ y $-\sqrt{3}$
4. Repetir los pasos 3 y 2 en este orden para graficar las demás raíces.

Ejemplo 1.14
(10 min)
Concluir que la raíz cuadrada de un número real positivo es $\sqrt{a} = b \leftrightarrow b^2 = a$, $a \geq 0$
a es radicando, b es raíz

Ejercicio 1.12
(10 min) Solución:

a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt{7}$
c) $\sqrt{0.5}$ e) $\sqrt{1.9}$
e) $\sqrt{1.8}$

[Hasta aquí clase 6]

[Desde aquí clase 7]

[C]

Aprender un nuevo método para graficar raíces cuadradas irracionales de forma más precisa.

Ejemplo 1.15
(15 min) *Utilizando regla y compás graficar las raíces cuadradas
*Pedirle a los estudiantes que lean los pasos propuestos en LE y que grafiquen las raíces propuestas.

Ejercicio 1.13
(10 min)
Solución en pág. 25

Ejemplo 1.16.
(5 min)
*Obtener la raiz cuadrada de potencias de dos.

Ejemplo 1.17. (5 min)

Ejercicio 1.14. (10 min)
Solución en pág. 25.

Unidad I. Lección 1.
Clase 8 y 9
(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: **[A]** Definir las propiedades de multiplicación y división de raíces.

Evaluación: Ejercicio 1.15, 1.16

[A]

Ejemplo 1.18
(10 min)
*Tener en cuenta que la simplificación de raíces es un contenido estudiando por lo que se puede pedir a los estudiantes lo resuelvan solos sin consultar LE
*Repasar la propiedad de multiplicación de raíces
*Concluir que si se tiene el producto de dos raíces cuadradas esta se puede expresar el producto de las cantidades sub radicales bajo un símbolo radical ($\sqrt{a}\ \sqrt{b} = \sqrt{ab}$).

Ejercicio 1.15
(10 min)
Solución en pág. 25

Ejemplo 1.19
(10 min)
*De igual manera que en el ejemplo anterior esta propiedad ya es conocida por los estudiantes sin embargo se debe hacer un repaso de ella.
Concluir que si se tiene $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Ejercicio 1.16
(15 min)
Solución en pág. 26

[Hasta aquí clase 8]

Clase 8 y 9. Cálculo con raíces cuadradas

Ejemplo 1.18. Simplifica la siguiente expresión
a) $\sqrt{3} \times \sqrt{5}$ b) $\sqrt{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{7}$

Solución:
Cuando se tiene un producto de raíces cuadradas el signo de multiplicación se obvia
a) $\sqrt{3} \times \sqrt{5} = \sqrt{3}\ \sqrt{5} = \sqrt{3 \times 5} = \sqrt{15}$
b) $\sqrt{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{7} = \sqrt{2}\ \sqrt{3}\ \sqrt{7} = \sqrt{42}$

En el ejemplo anterior se aplica la siguiente propiedad

Si $a > 0$, $b > 0$ se da que: $\sqrt{a}\ \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$

Ejercicio 1.15. Calcule
a) $\sqrt{2}\ \sqrt{7}$ b) $\sqrt{2}\ \sqrt{8}$ c) $\sqrt{12}\ \sqrt{3}$ d) $\sqrt{10}\ \sqrt{3}\ \sqrt{2}$ e) $\sqrt{7}\ \sqrt{5}\ \sqrt{3}$

Ejemplo 1.19. Simplifique la siguiente expresión $\sqrt{\frac{9}{16}}$
Solución:
$\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \frac{3}{4}$

En el ejemplo anterior se aplica la siguiente propiedad

Si $a > 0$ y $b > 0$ se da que: $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

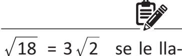
Ejercicio 1.16.
a) $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}}$ b) $\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{7}}$ c) $\sqrt{\frac{36}{25}}$ d) $\sqrt{\frac{12}{4}}$ e) $\sqrt{\frac{49}{81}}$ f) $\frac{\sqrt{28}}{\sqrt{7}}$

Ejemplo 1.20. Simplifique las siguientes expresiones aplicando las propiedades anteriores si es necesario.
a) $\sqrt{18}$ b) $\sqrt{12} + \sqrt{75} - \sqrt{\frac{3}{25}}$
Solución:
a) $\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2}$
$= \sqrt{9} \times \sqrt{2}$ aplicando la propiedad de la multiplicación de raíces.
$= 3\sqrt{2}$

[A]

En octavo grado se estudió estas propiedades con raíces cuadradas.

[B]



$\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ se le llama simplificación de raíces.

12 | Unidad I • Lección 1 • Clase 8 y 9. Cálculo con raíces cuadradas

[Desde aquí clase 9]

[B]

Ejemplo 1.20. (15 min)
M: ¿De qué otra forma podemos expresar $\sqrt{18}$ utilizando la descomposición de factores?
RP: $\sqrt{6}\ \sqrt{3}$: $\sqrt{9}\ \sqrt{2}$
M: Si tomamos la segunda opción ¿De qué otra forma se puede expresar?
RP: $3\sqrt{2}$

Objetivo: **[C]** Definir la raíz cuadrada de un número real positivo.

Evaluación: Ejercicio 1.9, 1.10

Clase 8 y 9

(Continuación)

(Continúa en la siguiente página)

b) $\sqrt{12} + \sqrt{75} - \sqrt{\frac{3}{25}}$

$= 2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{25}}$ simplificando $\sqrt{12}$, $\sqrt{75}$ y aplicando la propiedad de división de raíces.

$= 2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{5}$ obtener la $\sqrt{25}$

$= (2 + 5 - \frac{1}{5})\sqrt{3}$ sumando términos semejantes

$= \frac{34\sqrt{3}}{5}$

$\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3}$
$= \sqrt{4} \times \sqrt{3}$
$= 2\sqrt{3}$

$\sqrt{75} = \sqrt{25 \times 3}$
$= \sqrt{25} \times \sqrt{3}$
$= 5\sqrt{3}$

Para sumar o restar raíces cuadradas estas deben tener la misma cantidad subradical.

Ejercicio 1.17. Simplifique las siguientes expresiones.

a) $\sqrt{27}$ b) $\sqrt{50}$ c) $\sqrt{288}$ d) $\sqrt{\frac{3}{81}}$

e) $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{100}}$ f) $\sqrt{504}$ g) $\sqrt{75} - \sqrt{192}$ h) $\sqrt{24} + \sqrt{96} - \sqrt{150}$

j) $\sqrt{320} - \sqrt{80} + \frac{\sqrt{75}}{\sqrt{9}}$ k) $\sqrt{20} + 5\sqrt{2} - \sqrt{\frac{5}{9}} + \sqrt{50}$

Ejemplo 1.21. Aplicando los productos notables simplifique las siguientes expresiones.

a) $(\sqrt{3} + \sqrt{5})^2$ b) $(\sqrt{7} - 2\sqrt{5})(\sqrt{7} + 2\sqrt{5})$

Solución:

a) $(\sqrt{3} + \sqrt{5})^2 = (\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3}\sqrt{5} + (\sqrt{5})^2$
$= 3 + 2\sqrt{15} + 5$
$= 8 + 2\sqrt{15}$

b) $(\sqrt{7} - 2\sqrt{5})(\sqrt{7} + 2\sqrt{5}) = (\sqrt{7})^2 - (2\sqrt{5})^2$
$= 7 - 4(\sqrt{5})^2$
$= 7 - 20$
$= -13$

[C]

Para simplificar esta expresión se debe aplicar:
$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Ejercicio 1.18. Simplifique

a) $(2\sqrt{2} + 3)^2$ b) $(-\sqrt{6} + 3)^2$ c) $(5\sqrt{3} - \sqrt{2})(5\sqrt{3} + \sqrt{2})$

d) $(\sqrt{5} - 2\sqrt{3})^2$ e) $(\sqrt{10} - \sqrt{5})(\sqrt{10} + \sqrt{5})$

Unidad I • Lección 1 • Clase 8 y 9. Cálculo con raíces cuadradas | 13

*En el inciso b) se complica un poco más ya que aparte de simplificar hay que sumar raíces semejantes, por lo que si es necesario el docente debe ampliar la explicación.

Ejercicio 1.17

(15 min) Solución:

a) $3\sqrt{3}$ b) $5\sqrt{2}$

c) $12\sqrt{2}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{9}$

e) $\frac{\sqrt{10}}{10}$ f) $6\sqrt{14}$

g) $-3\sqrt{3}$ h) $\sqrt{6}$

j) $\frac{12\sqrt{5} + 5\sqrt{3}}{3}$

k) $\frac{5\sqrt{5} + 30\sqrt{2}}{3}$

Ejemplo 1.21

(10 min)

*Presentar en la pizarra y pedirle a los estudiantes que intenten resolverlo por ellos mismos.

*Hay una forma más fácil de resolver el ejercicio aplicando productos notables

M: ¿Qué producto notable se puede aplicar para resolver estos ejercicios?

Concluye en a) se aplica
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
En b) se aplica
$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

Ejercicio 1.18

(5 min) Solución

a) $17 + 12\sqrt{2}$ b) $15 - 6\sqrt{6}$

c) 73 d) $17 - 4\sqrt{15}$

e) 5

Unidad I. Lección 1.
Clase 10

Objetivo: **[A]** Simplifican expresiones con raíces aplicando la racionalización del denominador.
[B] Conocen el proceso de racionalizar el denominador.
[C] Racionalizan expresiones con raíces en el denominador

Evaluación: Ejercicio 1.19, 1.20.

Clase 10. Racionalización del denominador

Ejemplo 1.22. Simplifique la siguiente expresión $\frac{1}{\sqrt{20}}$.
Solución:

$\frac{1}{\sqrt{20}} = \frac{1}{\sqrt{4 \times 5}} = \frac{1}{2\sqrt{5}} = \frac{1 \times \sqrt{5}}{2\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{10}$ recuerda que $\sqrt{5} \times \sqrt{5} = \sqrt{5^2} = 5$

1^{ero} Simplificar 2do Racionalizar

[A]



En el proceso de racionalización de raíces en el denominador se simplifica primero si se puede y luego se racionaliza el denominador.

Este proceso consiste en convertir expresiones que llevan el signo $\sqrt{\ }$ en el denominador en la forma cuyo denominador no tenga $\sqrt{\ }$

Ejercicio 1.19. Racionalice:

a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ b) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ c) $\frac{6}{\sqrt{32}}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{5}}$

e) $12\sqrt{12} \div 16\sqrt{18}$

En el proceso de racionalización del denominador cuando este es una expresión de suma o resta se multiplica la expresión dada por un número obtenido de la siguiente manera:

[B]

Si el denominador es $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, entonces se multiplica por una fracción cuyo numerador y denominador es $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ ó $-\sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Si el denominador es $\sqrt{a} - \sqrt{b}$, entonces se multiplica la expresión por una fracción cuyo numerador y denominador es $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ ó $-\sqrt{a} - \sqrt{b}$.

Ejemplo 1.23. Racionalice $\frac{2}{1+\sqrt{2}}$
Soución:

Multiplicar la expresión por $\frac{(1-\sqrt{2})}{(1-\sqrt{2})}$

$$\frac{2}{1+\sqrt{2}} = \frac{2}{(1+\sqrt{2})} \cdot \frac{(1-\sqrt{2})}{(1-\sqrt{2})}$$

$$= \frac{2-2\sqrt{2}}{1^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{2-2\sqrt{2}}{1-2} = \frac{2-2\sqrt{2}}{-1} = -2+2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}-2$$



$2(1-\sqrt{2})$ es multiplicación de raíces aplicando la propiedad distributiva.
$2(1) - 2\sqrt{2} = 2 - 2\sqrt{2}$



Al multiplicar un número racional a por un número irracional de la forma $\sqrt{b}$ se expresa como: $a\sqrt{b}$

Ejercicio 1.20. Racionalice

a) $\frac{4}{5-\sqrt{3}}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ c) $\frac{1}{\sqrt{2}+3}$ d) $\frac{-4}{-3\sqrt{5}-2}$

e) $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$ f) $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ g) $\frac{4}{2\sqrt{3}-3}$ h) $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$

14 | Unidad I • Lección 1 • Clase 10. Racionalización del denominador

[A]

Ejemplo 1.22
(10 min)
M: ¿Cómo se puede simplificar $\frac{1}{\sqrt{20}}$?
Concluye que para simplificar la expresión se aplica la racionalización del denominador, donde la expresión $\frac{1}{\sqrt{20}} = \frac{1}{2\sqrt{5}}$ se multiplica por una raíz cuyo numerador y denominador es la raíz del denominador $\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\right)$.

Ejercicio 1.19
(12 min)
Solución en pág. 26.

[B]

*Explicar qué se debe hacer cuando se quiere racionalizar una expresión cuyo denominador este formado por una expresión en la que hay raices.

[C]

Ejemplo 1.23
(10 min)
*Explicar que cuando se tiene que racionalizar y el denominador es una expresión de suma o resta de dos términos entonces se multiplica la fracción dada por otra fracción cambiando de forma adecuada el signo de uno de sus términos.
*Realizar las operaciones de multiplicación suma y resta indicadas. Hacer que se den cuenta que en el denominador resultará un producto notable $(a+b)(a-b)$.



Ejercicio 1.20.
(8 min)
Solución en pág. 26.

Objetivo: **[A]** Representar intervalos reales en la recta numérica, como intervalo y como conjunto

Unidad I. Lección 1.
Clase 11

Evaluación: Ejercicio 1.21.

Clase 11 y 12. Intervalos

Ejemplo 1.24. Grafique en la recta numérica real todos los números que se encuentran entre –2 y 3 incluyéndolos.

Solución:

Notación gráfica

Al segmento desde el punto –2 hasta el punto 3 se le llama Intervalo real y se puede escribir de la siguiente forma:

$\{x \in \mathbb{R}, -2 \leq x \leq 3\}$ Notación conjuntista

$[-2, 3]$ Notación de intervalo

La notación conjuntista significa: el conjunto de los elementos x que pertenecen a los números reales que son mayores o iguales que –2 y menores e iguales que 3.

Ejemplo 1.25. Utilizando el ejemplo 1.24 represente en sus tres notaciones

a) Cuando se incluye solo –2

b) Cuando se incluye solo 3

c) Cuando no se incluye –2 y 3

Solución:

a) Notación gráfica

sí se incluye –2 — no se incluye 3

$\{x \in \mathbb{R}, -2 \leq x < 3\}$ N. Conjuntista

$[-2, 3[$ N. Intervalo

b) Notación gráfica

$\{x \in \mathbb{R}, -2 < x \leq 3\}$ N. Conjuntista

$]-2, 3]$ N. Intervalo

c) Notación gráfica

$\{x \in \mathbb{R}, -2 < x < 3\}$ N. Conjuntista

$]-2, 3[$ N. Intervalo

Ejercicio 1.21. Escriba los intervalos dados en las otras dos notaciones:

a) $]-6, 2]$ b) $\left[\frac{1}{2}, 5\right]$ c) $\{x \in \mathbb{R}, -1.3 < x \leq 1.3\}$

d) (recta numérica de –4 a 8)

[A]

La recta numérica real está compuesta por el conjunto de los números reales.

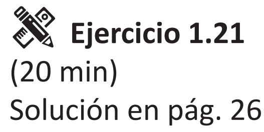
Intervalo real es un subconjunto de números reales en los que se incluyen signos de relación de orden estricta: >, < y las de orden amplia: ≥, ≤

Los intervalos reales se pueden representar mediante tres notaciones:
- Gráfica
- Conjuntista
- Intervalo

–2 y 3 se les conoce como extremos del intervalo.
En la notación de intervalo se usan [ ] cuando los extremos se incluyen] [cuando no se incluyen los extremos
En la notación conjuntista se utiliza: ≥, ≤ cuando se incluyen los extremos, >, <. Cuando no se incluyen los extremos.

Unidad I • Lección 1 • Clase 11 y 12. Intervalos | 15

En la notación conjuntista se utiliza: ≥, ≤ cuando se incluyen los extremos, >, < y cuando no se incluyen los extremos.



Ejercicio 1.21
(20 min)
Solución en pág. 26

[Hasta aquí clase 11]

[A]

Ejemplo 1.24
(10 min)
M: ¿Cómo se pueden graficar todos los números que están entre -2 y 3?
*Es posible que los estudiantes tengan dificultad al momento de responder pero recordarle que entre –2 y 3 hay números racionales e irracionales por lo que no hay espacio que queden sin graficar y por eso se usan barras para representarlos todos.
Concluye que al segmento graficado se le llama intervalo real.
Concluye en las tres formas de representar un intervalo real.

Ejemplo 1.25
(15 min)
*Identificar los símbolos que se utilizan en las tres notaciones cuando los extremos se incluyen o no.

Concluye que en la notación de intervalo se usan [ ] cuando los extremos se incluyen,] [cuando no se incluyen los extremos

Unidad I. Lección 1.
Clase 12

Objetivo: **[B]** Clasifican los tipos de intervalos.

Evaluación: Ejercicio 1.22

[Desde aquí clase 12]

[B]

(15 min)

*Se debe aprovechar el ejemplo anterior para clasificar los intervalos definiendo las características y los símbolos que se utilizan en cada tipo

*Concluir en la tabla resumen que se presenta en LE.

Ejemplo 1.26
(10 min)
*Aplicando lo aprendido en la tabla resumen representan intervalos infinitos en sus tres notaciones

Ejercicio 1.22
(20 min)
Solución en pág. 26.

Clasificación de los intervalos

Los intervalos se clasifican en cuatro grupos

a) Intervalos cerrados: es el intervalo que incluye los extremos
b) Intervalos semiabiertos o semicerrardo: es el intervalo que no incluye uno de los extremos.
c) Intervalos abiertos: es el intervalo que no incluye los extremos
d) Intervalos infinitos: son los intervalos que solo tienen un extremo y tienden al infinito positivo o negativo.

N°	Tipo de intervalo	Notación gráfica	Notación conjuntista	Notación de intervalo
1	Cerrado		$\{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$	$[a, b]$
2	Semiabierto por la izquierda		$\{x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$	$]a, b]$ ó $(a, b]$
3	Semiabierto por la derecha		$\{x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}$	$[a, b[$ ó $[a, b)$
4	abierto		$\{x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$	$]a, b[$ ó (a, b)
5	Infinitos		$\{x \in \mathbb{R}, x \geq a\}$	$[a, +\infty[$ ó $[a, +\infty)$
			$\{x \in \mathbb{R}, x > a\}$	$]a, +\infty[$ ó $(a, +\infty)$
			$\{x \in \mathbb{R}, x \leq a\}$	$]-\infty, a]$ ó $(-\infty, a]$
			$\{x \in \mathbb{R}, x < a\}$	$]-\infty, a[$ ó $(-\infty, a)$

[B]



El ejemplo 1.24 es un intervalo cerrado.

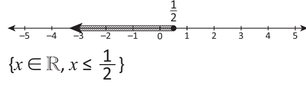
En el ejemplo 1.25 a) y b) son intervalos semiabiertos.



Para intervalos abiertos y semiabiertos se pueden usar los paréntesis ( ), ( ], [ ).

Ejemplo 1.26. Represente en notación conjuntista y gráfica el siguiente intervalo $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right]$

Solución:



$\{x \in \mathbb{R}, x \leq \frac{1}{2}\}$

Ejercicio 1.22.

a) Determine qué tipo de intervalo es:

$a_1)$ $\left[-\frac{2}{3}, 4\right]$ $a_2)$ $\left\{x \in \mathbb{R}, -\frac{3}{4} < x < \frac{2}{3}\right\}$ $a_3)$ $]-\infty, 3]$

$a_4)$ $\{x \in \mathbb{R}, x \geq -5\}$ $a_5)$ (recta numérica de –3 a 4, marcado $\sqrt{5}$)

$a_6)$ $\{x \in \mathbb{R}, -\pi < x < \pi\}$

$a_7)$ (recta numérica de –4 a 4, marcado $-\frac{3}{2}$) $a_8)$ $\left[-\frac{1}{4}, \frac{7}{4}\right]$

$a_9)$ $\{x \in \mathbb{R}, x \leq 1.5\}$ $a_{10})$ $]-2.41, \sqrt{7}]$

b) Escriba los intervalos dados en las otras dos formas.

16 | Unidad I • Lección 1 • Clase 11 y 12. Intervalos

Objetivo: **[A]** Definir notación científica.

Unidad I. Lección 1.

Clase 13

(Continúa en la siguiente página)

Clase 13. Notación científica

 **Ejemplo 1.27.** Juan midió el peso de una piedra, la aguja indica un punto cerca de 14 kg 400 g. Es decir, que la piedra pesó un poco más de 14 kg 350 g y menos de 14 kg 450 g

Si Juan representa el peso de la piedra con 14 kg 400 g no se sabe con exactitud lo que midió, es decir, no se puede saber si el peso queda entre 14 kg 350 g y 14 kg 450 g o entre 14 kg 395 g y 14 kg 405 g etc.

¿De qué manera puede Juan representar el peso con una escala de exactitud?

Solución:
14.4 kg

Si se quiere representar el peso con la unidad de medida g se hace lo siguiente

14 kg 400 g = 14400 g
= 1.44×10000 g
= 1.44×10^4 g

A este tipo de notación (1.44×10^4)se le llama notación científica.

Definición 1.11
Un numero está escrito en notación científica si tiene la forma $a \times 10^n$ donde $1 \leq a < 10$ y n es un número entero.

A las cifras que aparecen en la expresión del número a se les llama cifras significativas.

 **Ejemplo 1.28.**

- Si una distancia es de 3.2×10^4 m (con 2 cifras significativas) significa que esta distancia mide entre 3.15×10^4 y 3.25×10^4 (es decir 31500 m y 32500 m)
- Si la distancia es de 3.20×10^4m (con 3 cifras significativas) la medida está entre 3.195×10^4 y 3.205×10^4m (32050m)
- Si fuera de 3.200×10^4 m (4 cifras significativas) estaría entre 3.1995×10^4m (31995 m) y 3.2005×10^4 m (32005 m). Esta última medición es más exacta ya que tiene más cifras significativas.

Para escribir un número en notación científica, este se multiplica y divide por una misma potencia de base 10 de modo que la primera cifra sea entera y las demás son decimales.

[A]



La notación $1 \leq a < 10$ significa que a puede tomar el valor de 1 ó valores entre 1 y 10 sin incluir el 10.
En la expresión 1.44×10^4 el número de cifras significativas es 3.
Las cifras significativas indican la exactitud de la escala de medición.

Unidad I • Lección 1 • Clase 13. Notación científica | 17

[A]

Ejemplo 1.27
(15 min)
*Poner el problema en la pizarra y hacer que el estudiante proponga formas de cómo se puede representar el peso.
M: Cuantos gramos hay en 14 kg 400g?
RP: Hay 14400 g
Concluye que 14400 se puede expresar como 1.44 x 10000 ó 1.44 x 104
Este proceso se le conoce como notación científica.

Definición 1.11. (5 min)

Ejemplo 1.28
(10 min)
*Leer LE para comprender como se utilizan las cifras significativas en notación científica.
*Concluir que para escribir un número en notación científica este se multiplica y divide por una misma potencia de 10.
*Hacer énfasis que un número escrito en notación científica la primera cifra debe se entera mayor o igual a 1 y distinto de 10.

[B]

 **Ejemplo 1.29.** (15 min)
*Hacer que los estudiantes lo resuelvan por si solos.
*Revisar el LE y comparar respuestas.
Concluir que si el exponente es un entero negativo entonces la cantidad es menor.

[Hasta aquí clase 12]

Clase 13
(Continuación)

Objetivo: **[B]** Expresan cantidades en notación científica.
[C] Expresan cantidades de notación científica a notación ordinaria.

Evaluación: Ejercicio 1.23, 1.24

[Desde aquí clase 13]

[B]

 **Ejemplo 1.29**
(15 min)

 **Ejercicio 1.23**
(15 min)
Solución en pág. 27

[C]

 **Ejemplo1.30**
(15 min)
*Es importante que los estudiantes identifiquen cantidades escritas en notación científica o puedan escribirlas como tal, pero también es necesario que aprendan como escribir una cantidad en notación científica en su manera normal.

M: ¿Qué significa que el exponente de la potencia sea positivo?

M: ¿Qué significa que el exponente de la potencia sea negativo?

Concluir el punto se corre a la derecha tantos espacios como indica el exponente, si este es positivo, de lo contrario se corre hacia la izquierda.

Ejemplo 1.29. Escribir en notación científica
a) 53617 b) 0.00034
Solución:
a) $53617 = \frac{53617 \times 10^4}{10^4} = [53617 \div 10^4] \times 10^4 = 5.3617 \times 10^4$

b) $0.00034 = \frac{0.00034 \times 10^4}{10^4} = \frac{0.00034 \times 10000}{10^4} = 3.4 \times \frac{1}{10^4} = 3.4 \times 10^{-4}$

Del ejemplo anterior se puede concluir:

Si el exponente es un número entero negativo entonces la cantidad es menor que 1.

Ejercicio 1.23. Escriba las siguientes cantidades en notación científica. La cantidad de las cifras significativas está dada entre corchetes
a) 5869713600 millas (años luz) [8]
b) 2000000000000 (2 billones) [1]
c) 0.000001 metros (tamaño aproximado del VIH) [1]
d) 59000000 libros (libros de la biblioteca del congreso de USA) [4]
e) 0.000001 metros (un nanómetro) [2]

Ejemplo 1.30. Convertir las siguientes cantidades de notación científica a notación ordinaria
a) 4.3×10^4
b) 4.3×10^{-4}

Solución:
Para convertir una cantidad de notación científica a notación ordinaria se multiplica el número a por una potencia de base 10
a) $4.3 \times 10^4 = 4.3 \times 10000$
$= 43000$

b) $4.3 \times 10^{-4} = 4.3 \times \frac{1}{10^4} = \frac{4.3}{10000} = 0.00043$

Ejercicio 1.24. Escriba en notación ordinaria las siguientes cantidades
a) 1.84×10^3 b) 3.014×10^{-2} c) 9.9×10^5
d) 5.08×10^{-7} e) 8.371×10^{10} f) 4.123×10^{-3}

[B]



En a, b se consideran 4 cifras significativas.

En la expresión 3.4×10^{-4} el exponente -4 indica que la cantidad es menor que 1, es decir $0.0034 < 1$
Si el punto decimal se desplaza hacia la izquierda, el exponente es positivo, si se desplaza hacia la derecha el exponente es negativo.
$325000 = 3.25 \times 10^5$
$0.0000325 = 3.25 \times 10^{-5}$

[C]



La notación científica se emplea con mucha frecuencia y es muy útil en diferentes ciencias ya que es utilizado para expresar cantidades muy grandes o muy pequeñas.

18 | Unidad I • Lección 1 • Clase 13. Notación científica

 **Ejercicio 1.24.** (15 min) Solución:

a) 1840 b) 0.03014 c) 990 000 d) 0.000000508 e) 83 710 000 000 f) 0.004123

Objetivo: Aplicar lo aprendido sobre números reales.

Evaluación: Ejercicios de la lección

Unidad I. Lección 1.
Ejercicios de la lección
(Continúa en la siguiente página)

Ejercicios de la lección

1. Dados los siguientes números marque a que conjunto pertenecen. Clase 1, 2 y 3

Número	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{I}$	$\mathbb{R}$
-3					
$\frac{12}{4}$					
$-\pi$					
$-\frac{15}{3}$					
1.2					
$\frac{3}{2}$					
$-\frac{1}{5}$					
$\sqrt{7}$					
1.136666...					
$-\sqrt{36}$					
$-\sqrt{11}$					

2. Simplifique las siguientes fracciones a su mínima expresión. Clase 4

a) $-\frac{18}{30}$ b) $\frac{16}{48}$ c) $-\frac{7}{21}$ d) $-\frac{162}{24}$

e) $-2\frac{5}{75}$ f) $3\frac{24}{36}$

3. Convierta las siguientes fracciones a decimales y marque que tipo de decimal es. Clase 4

		Tipo de número decimal		
Fracción	**Número decimal**	**Periódico puro**	**Periódico mixto**	**Exacto**
$\frac{27}{4}$				
$-\frac{17}{3}$				
$-\frac{15}{8}$				
$\frac{29}{6}$				
$\frac{8}{3}$				

Unidad I • Lección 1 • Ejercicios de la lección | 19

1. Solución en pág. 27

2. a) $-\frac{3}{5}$ b) $\frac{1}{3}$

c) $-\frac{1}{3}$ d) $-\frac{27}{4}$

e) $-2\frac{1}{15}$ f) $3\frac{2}{3}$

3. Solución en pág. 28

Ejercicios de la lección
(Continuación)

4. a) 5 b) 1

c) –17.5 d) $\frac{167}{20}$

e) –180 f) $-\frac{1}{4}$

g) $8\sqrt{2} - 3\sqrt{3}$

f) $2\sqrt{6} + 2\sqrt{15}$

5. Solución en pág. 28

6. a) 2 b) 8
c) –3 d) 3
e) –3

7. a) 9 b) 3

c) $\frac{2}{3}$ d) $\sqrt{21}$

e) $2\sqrt{3}$ f) $\sqrt{\frac{6}{5}}$

g) $\sqrt{3}$ h) 2

8. a) $\frac{\sqrt{5}}{5}$

b) $-\frac{3\sqrt{2}}{2}$

c) $\frac{\sqrt{21}}{7}$

d) $-\frac{5\sqrt{6}}{6}$

e) $\frac{-3+3\sqrt{3}}{2}$

f) $3 + 2\sqrt{2}$

g) $-2\sqrt{10} - 2\sqrt{15}$

4. Resuelva las siguientes operaciones para verificar la propiedad de cierre. — Clase 4

a) $-5 + 4 - 2 + 8$ b) $\frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6}$

c) $-9.2 + 4.3 - 12.6$ d) $5 + \{4 - (\frac{2}{5} + \frac{1}{4})\}$

e) -12×15 f) $\frac{1}{4} \times \frac{3}{2} \times (-\frac{2}{3})$

g) $3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 7\sqrt{3} + 4\sqrt{3}$ h) $2\sqrt{3}\ (\sqrt{2} + \sqrt{5})$

5. Grafique en la recta numérica los siguientes números. — Clase 5

$\left\{-\frac{7}{4}, -3, 2.5, \frac{3}{2}, -1.2, \frac{1}{5}, \sqrt{7}, -\sqrt{6}\right\}$

6. Encuentre — Clase 6

a) $|-2|$ b) $|-8|$ c) $-|3|$ d) $|-3+0|$ e) $-|-1-2|$

7. Calcule — Clase 6, 7, 8 y 9

a) $\sqrt{81}$ b) $\sqrt{3^2}$ c) $\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2}$ d) $\sqrt{7} \times \sqrt{3}$

e) $\sqrt{2} \times \sqrt{6}$ f) $\sqrt{\frac{9}{5}}\sqrt{\frac{2}{3}}$ g) $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{5}}$ h) $\sqrt{\frac{28}{7}}$

8. Racionalice — Clase 10

a) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ b) $-\frac{3}{\sqrt{2}}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ d) $\frac{-5}{\sqrt{6}}$

e) $\frac{3}{1+\sqrt{3}}$ f) $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ g) $\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

9. Represente los intervalos en las otras dos formas — Clase 11 y 12

a) $[-3, 4]$

b) −2 −1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

c) $\{x/x \in \mathbb{R}, -\frac{2}{3} \leq x < 5$

d) $]-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}[$

10. Escriba las siguientes cantidades en notación científica — Clase 13

a) 34000000000
b) 0.000001
c) 374100
d) 0.008193

11. Escriba las siguientes cantidades en notación ordinaria

a) 2.3×10^5
b) 1.3×10^{-4}
c) 7.3143×10^{-8}
d) 3.235×10^3

20 | Unidad I • Lección 1 • Ejercicios de la lección

Incisos **9)**, **10)** y **11)**, véase solución en la página 28.

Solución Ejercicio 1.4. Pág. 9

Número	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{I}$
-7		X	X	
$\sqrt{5}$				X
$\frac{12}{3}$	X	X	X	
1.6			X	
5	X	X	X	
$4.3\overline{21}$			X	

Número	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{I}$
π				X
$\frac{6}{5}$			X	
$\frac{8}{2}$	X	X	X	
$-\frac{15}{3}$		X	X	
$\sqrt[3]{6}$				X
$\sqrt[5]{32}$	X	X	X	

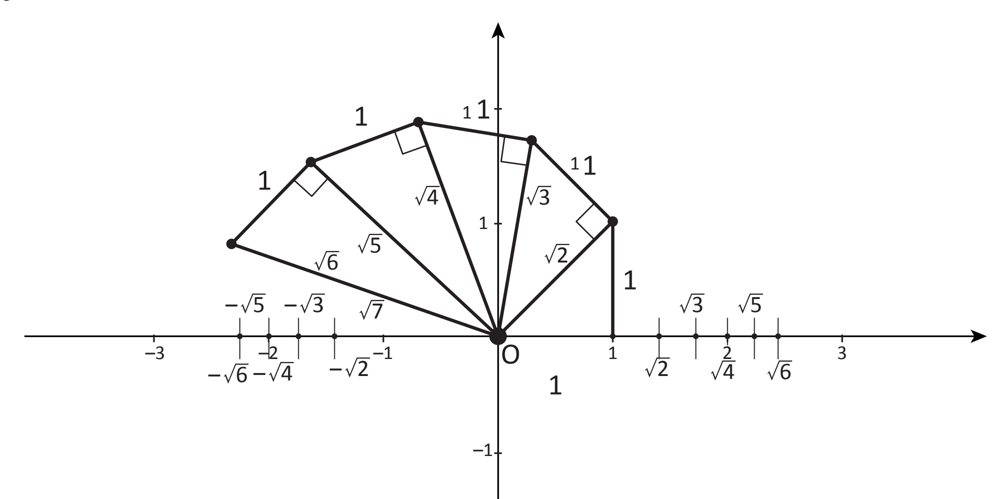
Solución Ejercicio 1.10. Pág. 13

a) 3 b) 7 c) -6 d) -2

e) 7 f) 2 g) $\frac{12}{5}$ h) 1.9

i) -3 j) $\frac{11}{12}$ k) 0.5 l) -15.5

Solución Ejercicio 1.13. Pág. 15



Solución Ejercicio 1.14. Pág. 15

a) 10 b) -6 c) 8 d) $\frac{5}{3}$ e) 21

f) $\frac{6}{5}$ g) 7 h) $-3+\pi$ i) $3-a$

Solución Ejercicio 1.15. Pág. 16

a) $\sqrt{15}$ b) 4 c) 6 d) $\sqrt{30}$ e) $\sqrt{35}$

Solución Ejercicio 1.16. Pág. 16

a) $\sqrt{5}$ b) $\sqrt{3}$ c) $\frac{6}{5}$ d) $\sqrt{3}$ e) $\frac{7}{9}$ f) 2

Solución Ejercicio 1.19. Pág. 18

a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ b) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ c) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ d) $\frac{\sqrt{15}}{15}$ e) $\frac{\sqrt{6}}{4}$

Solución Ejercicio 1.20. Pág. 18

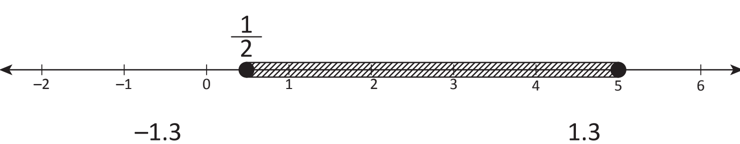
a) $\frac{10+2\sqrt{3}}{11}$ b) $3-\sqrt{6}$ c) $\frac{3-\sqrt{2}}{7}$ d) $\frac{12\sqrt{5}-8}{41}$

e) $\sqrt{3}+2$ f) $\sqrt{10}+\sqrt{6}$ g) $\frac{8\sqrt{3}+12}{3}$ h) $2\sqrt{2}+3$

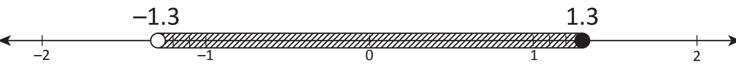
Solución Ejercicio 1.21. Pág. 19

a) $\{x \mid x \in \mathbb{R}, -6 < x \leq 2\}$

b) $\{x \mid x \in \mathbb{R}, \frac{1}{2} \leq x \leq 5\}$



c)]–1.3, 1.3]



d) $\{x \mid x \in \mathbb{R}, -1 < x < 6\}$
]–1, 6[

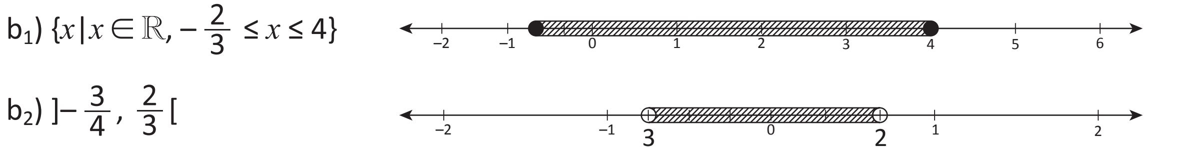
Solución Ejercicio 1.22. Pág. 20

a) a_1) Cerrado a_2) Abierto a_3) Infinito
a_4) Infinito a_5) Semi-Abierto por la Izquierda a_6) Abierto
a_7) Infinito a_8) Cerrado a_9) Infinito
a_{10}) Semi-Abierto por la Izquierda

b)

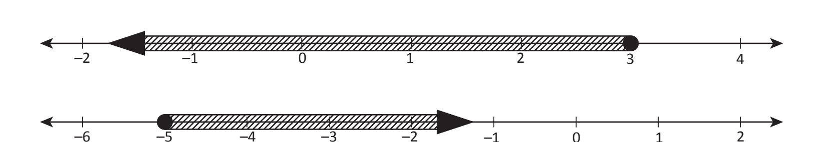
b_1) $\{x \mid x \in \mathbb{R}, -\frac{2}{3} \leq x \leq 4\}$

b_2) $]-\frac{3}{4}, \frac{2}{3}[$



b_3) $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \leq 3\}$

b_4) $[-5, \infty[$

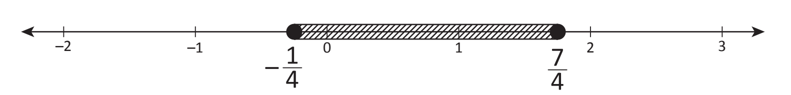


b5) $]-1, \sqrt{5}\,]$, $\{x \mid x \in \mathbb{R}, -1 < x > -\sqrt{3}\,\}$

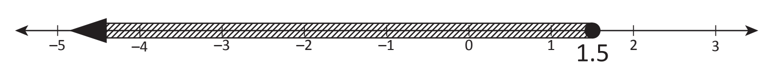
b6) $]-\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\pi}[$

b7) $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x > -\frac{3}{2}\}$ $\quad]-\frac{3}{2}, \infty[$

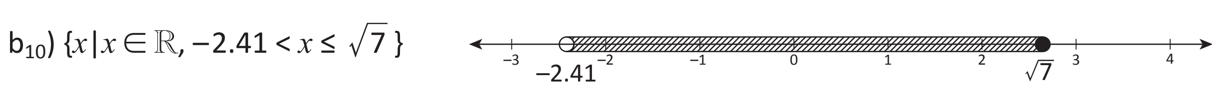
b8) $\{x \mid x \in \mathbb{R}, -\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{7}{4}\}$



b9) $]-\infty, 1.5]$



b10) $\{x \mid x \in \mathbb{R}, -2.41 < x \leq \sqrt{7}\,\}$



Solución Ejercicio 1.23. Pág. 22

a) 5.8697136×10^{9} b) 2×10^{12} c) 1×10^{-6} d) 5.900×10^{7} e) 1.0×10^{-6}

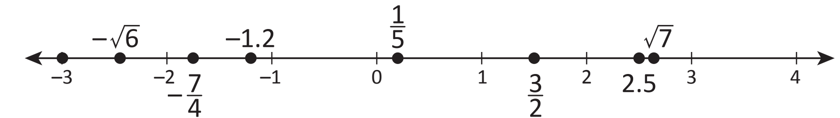
Solucionario Ejercicios de la lección. Pág. 23

1.

Número	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{I}$	$\mathbb{R}$
-3		X	X		X
$\frac{12}{4}$	X	X	X		X
$-\pi$				X	X
$-\frac{15}{3}$		X	X		X
1.2			X		X
$\frac{3}{2}$			X		X
$-\frac{1}{5}$			X		X
$\sqrt{7}$				X	X
1.136666…			X		X
$-\sqrt{36}$		X	X		X
$-\sqrt{11}$				X	X

3.

		Tipo de número decimal		
Fracción	**N° decimal**	**Periódico puro**	**Periódico mixto**	**Exacto**
$\frac{27}{4}$	6.75			X
$-\frac{17}{3}$	$-5.\overline{6}$	X		
$-\frac{15}{8}$	−1.875			X
$\frac{29}{6}$	$4.8\overline{3}$		X	
$\frac{8}{3}$	$2.\overline{6}$	X		

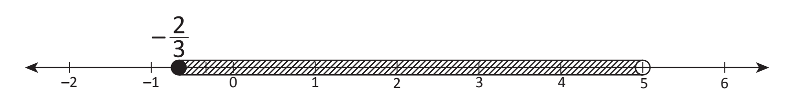
5. 

9. a) $\{x \mid x \in \mathbb{R}, -3 \leq x \leq 4\}$

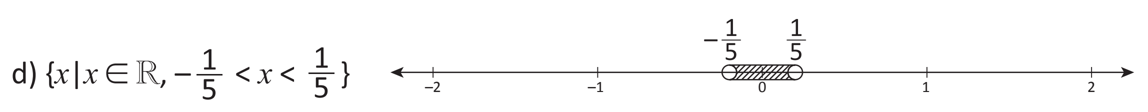


b) $\{x \mid x \in \mathbb{R}, -1 < x \leq 8\}$]−1, 8]

c) $[-\frac{2}{3}, 5[$



d) $\{x \mid x \in \mathbb{R}, -\frac{1}{5} < x < \frac{1}{5}\}$



10. a) 3.4×10^{10} b) 1×10^{-6} c) 3.741×10^{5} d) 8.193×10^{-3}

11. a) 230 000 b) 0.00013 c) 0.000000073143 d) 3235

Objetivo: Definir una ecuación lineal.
Resolver ecuaciones lineales.

Evaluación: Ejercicio 2.1.

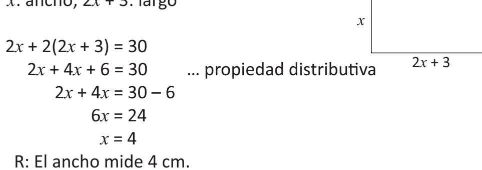
Unidad I. Lección 2.
Clase 1
(Continúa en la siguiente página)

Lección 2. Ecuaciones e inecuaciones
Clase 1. Ecuaciones lineales

Ejemplo 2.1. El largo de un rectángulo es el doble de su ancho aumentado en 3. Si su perímetro mide 30 cm ¿Cuánto mide su ancho?

Solución: x: ancho; $2x + 3$: largo

$2x + 2(2x + 3) = 30$
$2x + 4x + 6 = 30$ … propiedad distributiva
$2x + 4x = 30 - 6$
$6x = 24$
$x = 4$
R: El ancho mide 4 cm.



La expresión $2x + 2(2x + 3) = 30$ es una **ecuación lineal** o **ecuación de primer grado en una variable**.

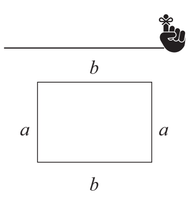
Definición 2.1
Una ecuación lineal o de primer grado en una variable es toda ecuación de la forma: $ax + b = 0$ donde a y b son números reales y $a \neq 0$.

Ejemplo 2.2. Resuelva las siguientes ecuaciones lineales:

a) $4x - 8 = -6x + 12$
Solución: $4x - 8 = -6x + 12$
$4x + 6x = 12 + 8$
$10x = 20$
$x = 2$

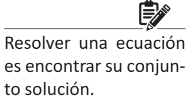
b) $-5x + 4 + 3x = -6$
Solución: $-5x + 4 + 3x = -6$
$-5x + 3x = -6 - 4$
$-2x = -10$
$x = 5$

c) $3x + 9 = 5(2x + 3)$
Solución: $3x + 9 = 5(2x + 3)$
$3x + 9 = 10x + 15$
$3x - 10x = 15 - 9$
$-7x = 6$
$x = -\frac{6}{7}$



Perímetro $= a + b + a + b$
$= 2a + 2b$

Al resolver las ecuaciones lineales se aplican las propiedades de la igualdad:
Si A = B entonces:
a) A + C = B + C
b) A – C = B – C
c) AC = BC
d) $\frac{A}{C} = \frac{B}{C}$; C ≠ 0



Resolver una ecuación es encontrar su conjunto solución.

El conjunto solución de una ecuación, son los valores que la hacen verdadera.

Unidad I • Lección 2 • Clase 1. Ecuaciones lineales | 21

Ejemplo 2.1
(10 min)
Definir una ecuación lineal.
*Considerando a x como el ancho del rectángulo escribir la expresión $2x + 2(2x + 3) = 30$ y llamarla ecuación lineal o ecuación de primer grado en una variable.
*Recordar las propiedades de las igualdades.



Ejemplo 2.2.
(20 min)
*Aplicar las propiedades de las igualdades para encontrar el conjunto solución.

*Clasificación de los ejemplos. En los incisos a y b, solo aplican las propiedades de la igualdad.

En los inciso c y d, además aplican la propiedad distributiva.

Clase 1
(Continuación)

En el inciso e, se convierten los números decimales en números enteros multiplicando por la unidad seguida de ceros según sea el caso.

En el inciso f, se convierten los números racionales en números enteros multiplicando por el mcm de los denominadores.

 **Ejercicio 2.1**
(15 min)

a) $x = -4$

b) $x = -1$

c) $x = \frac{43}{16}$

d) $x = \frac{4}{19}$

e) $x = -0.\overline{3}$

f) $x = -1.6287...$

g) $x = 15$

h) $x = -\frac{2}{5}$

j) $a + a + 8 + 2a - 12 = 40$ R: 10 cm, 11 cm, 19 cm

j) $5x = 3(x + 4)$ $x = 6$ R: Las edades son 6 y 10

d) $-2(3x + 4) - 1 = 3 - (-2x + 3)$

Solución:
$$-2(3x + 4) - 1 = 3 - (-2x + 3)$$
$$-6x - 8 - 1 = 3 + 2x - 3$$
$$-6x - 2x = 8 + 1 + 3 - 3$$
$$-8x = 9$$
$$x = -\frac{9}{8}$$

e) $0.2x - 9 = 0.4x + 3$

Solución 1:
$$0.2x - 9 = 0.4x + 3$$
$$0.2x - 0.4x = 3 + 9$$
$$-0.2x = 12$$
$$x = \frac{12}{-0.2}$$
$$x = -60$$

Solución 2:
$$0.2x - 9 = 0.4x + 3$$
$$10(0.2x - 9) = 10(0.4x + 3)$$
$$2x - 90 = 4x + 30$$
$$2x - 4x = 30 + 90$$
$$x = -60$$

f) $-\frac{2}{3}x + 5 = -\frac{3}{4}x - 3$

Solución 1:
$$-\frac{2}{3}x + 5 = -\frac{3}{4}x - 3$$
$$-\frac{2}{3}x + \frac{3}{4}x = -5 - 3$$
$$\frac{1}{12}x = -8$$
$$x = -96$$

Solución 2:
$$-\frac{2}{3}x + 5 = -\frac{3}{4}x - 3$$
$$12(-\frac{2}{3}x + 5) = 12(-\frac{3}{4}x - 3)$$
$$-8x + 60 = -9x - 36$$
$$-8x + 9x = -60 - 36$$
$$x = -96$$



Se pueden convertir los números decimales en números enteros multiplicando por 10 (o 100... según el caso), para evitar operar con los números decimales.



Se pueden convertir los números racionales en números enteros multiplicando por el mcm de los denominadores, para evitar operar con los números racionales.

Ejercicio 2.1. Resuelva las siguientes ecuaciones lineales.

a) $5x + 4 = -2x - 24$

b) $-3x + 2 = -10x - 5$

c) $2(3x - 4) = -5(2x - 7)$

d) $-4 - 3(5x - 6) = -4(-x - 1) + 6$

e) $-0.4x - 3 = -0.2 + 8x$

f) $4x - 0.3 = 0.5x - 6$

g) $\frac{1}{3}x - 9 = \frac{1}{5}x - 7$

h) $\frac{3}{4}x - 1 = 2x - \frac{1}{2}$

Resuelva los siguientes problemas con ecuaciones lineales:

i) El lado mayor de un triángulo es 8 cm más largo que el lado a. El lado b tiene 12 cm menos que el doble de la longitud del lado a. Si el perimetro es de 40 cm ¿Cuál es la longitud de cada lado?

j) Pedro tiene 4 años más que Juan ¿Qué edad tienen si 5 veces la edad de Juan es tres veces la edad de Pedro?

22 | Unidad I • Lección 2 • Clase 1. Ecuaciones lineales

Objetivo: Despejar para una variable dada en una fórmula.

Evaluación: Ejercicio 2.3.

Unidad I. Lección 2.
Clase 2
(Continúa en la siguiente página)

Clase 2. Despeje de fórmulas

La fórmula $\frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ se usa para calcular la resistencia total R_T de un circuito de dos resistencias R_1 y R_2 colocadas en paralelo.

Ejemplo 2.3. Calcule la resistencia total de un circuito en paralelo, formado por dos resistencias de 4 ohms y 6 ohms.

Solución: R_1 = 4 ohms R_2 = 6 ohms

$$\frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

$$\frac{1}{R_T} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{R_T} = \frac{3+2}{12}$$

$$\frac{1}{R_T} = \frac{5}{12} \quad \rightarrow 1(12) = 5(R_T)$$

$$R_T = \frac{12}{5} = 2.4$$

R: La resistencias total es 2.4 ohms.

En el despeje de fórmulas hay que aplicar las propiedades de la igualdad.

Ejemplo 2.4. En la fórmula $\frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$, despeje para R_T.

Solución: $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_T}$

$\frac{R_2+R_1}{R_1R_2} = \frac{1}{R_T}$ calculando el mcm de los denominadores

$$R_T(R_2+R_1) = 1(R_1 R_2)$$

$$R_T = \frac{R_1R_2}{R_2+R_1}$$

Ejercicio 2.2. En la fórmula $\frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ despeje para:

a) R_1 b) R_2

Ejemplo 2.5. En las siguientes ecuaciones despeje para la variable x.

a) $\frac{a}{x} = \frac{b}{c}$

Solución: $ac = bx$

$$x = \frac{ac}{b}$$

b) $\frac{ab}{x} = r + 1$

Solución: $ab = x(r+1)$

$$\frac{ab}{r+1} = x$$

c) $\frac{a}{x+1} = r$

Solución: $a = r(x+1)$

$$a = rx + r(1)$$

$$a - r = rx$$

$$\frac{a-r}{r} = x$$

Unidad I • Lección 2 • Clase 2. Despeje de fórmula 23

Ejemplo 2.3.
(10 min)
*Interpretar la fórmula de la resistencia total de un circuito de resistencias en paralelo.
*Encontrar la resistencia total.

Ejemplo 2.4.
(10 min)
*Hacer que los estudiantes se den cuenta que para despejar para R_T debe calcularse el mcm de los denominadores.

Ejercicio 2.2.
(5 min) Solución

a) $R_1 = \frac{R_T R_2}{R_2 - R_T}$

b) $R_2 = \frac{R_T R_1}{R_1 - R_T}$

Ejemplo 2.5.
(10 min)
*En estos ejemplos la variable a despejar está en el denominador de uno de los términos.

Unidad I. Lección 2.

Clase 2
(Continuación)

Clase 3
(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: Definir una inecuación lineal.

Evaluación: Ejemplo 2.7.

Ejercicio 2.3
(10 minutos)

a) $d = \dfrac{cb}{a}$ b) $b = \dfrac{ae}{cd}$

c) $e = \dfrac{bcy}{ax}$ d) $y = \dfrac{5x}{a+e}$

e) $y = \dfrac{3m}{x+5}$

f) $x = \dfrac{2n+4m}{m}$

g) $y = \dfrac{x-5m+5}{1-m}$

h) $x = \dfrac{e-b+ay-ak}{k-y}$

[Hasta aquí Clase 2]

[Desde aquí Clase 3]



Ejemplo 2.6.
(25 min)

*En el problema interpretar el “hasta 1500 libras” como una expresión donde se utiliza el signo ≤.

*Llamar inecuación lineal en una variable a la expresión:

$150x + 300 \leq 1500$

*Determinar que la relación de orden entre dos números se establece usando los signos de: <, ≤, >y ≥; y que estos mismos signos se utilizan para las inecuaciones lineales.

Ejercicio 2.3. En cada ecuación despeje para la variable indicada.

a) $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ despeje para d

b) $\dfrac{a}{bc} = \dfrac{d}{e}$ despeje para b

c) $\dfrac{ax}{y} = \dfrac{bc}{e}$ despeje para e

d) $\dfrac{5x}{y} = a + e$ despeje para y

e) $x + 5 = \dfrac{3m}{y}$ despeje para y

f) $\dfrac{2n}{x-4} = m$ despeje para x

g) $\dfrac{x}{5-y} = m - 1$ despeje para y

h) $k - y = \dfrac{e-b}{x+a}$ despeje para x

Clase 3. Inecuaciones

Ejemplo 2.6. Un autobús puede transportar hasta 1500 libras. Lleva una carga de 300 libras y varias personas que en promedio pesan 150 libras cada una. Si x es el número de personas, escriba una expresión que establezca esa relación.

Solución:

$150x + 300 \leq 1500$ x: número de personas

La expresión $150x + 300 \leq 1500$ es una inecuación lineal en una variable.
La relación de orden entre dos números se puede establecer utilizando los siguientes 4 símbolos de desigualdad:

Símbolo	Ejemplo	Sentido	Nota
<	$a < 4$	a es menor que 4	a no puede ser 4
≤	$a \leq 4$	a es menor o igual que 4	a puede ser 4
>	$a > 4$	a es mayor que 4	a no puede ser 4
≥	$a \geq 4$	a es mayor o igual que 4	a puede ser 4



3 < 5 es una desigualdad numérica.
$a < 5$ es una inecuación, porque lleva una variable y una de los signos de desigualdad.

Definición 3.1
Una inecuación lineal o de primer grado en una variable es una expresión con uno o más símbolos de desigualdad y una variable con exponente 1.

Ejemplo 2.7. Exprese con una inecuación las siguientes situaciones:

a) 3 veces un número disminuido en 6 es mayor que 40.

Solución: x: número $3x - 6 > 40$

b) El sueldo base de un empleado es L 10 000. Por cada moto vendida se le da una comisión sobre venta de L 250. El mes pasado obtuvo un salario arriba de los L 15 000.

Solución: x: número de motos $250x + 10\,000 > 15\,000$

24 | Unidad I • Lección 2 • Clase 3. Inecuaciones

*Interpretar el significado de cada símbolo especialmente los de ≤ y ≥.
*Definir una inecuación lineal.
*Diferenciar entre una desigualdad numérica y una inecuación.



Ejemplo 2.7.
(20 min)

Objetivo: Deducir las propiedades de las desigualdades.

Evaluación: Ejercicio 2.4.

Unidad I. Lección 2.

Clase3
(Continuación)

Clase 4
(Continúa en la siguiente página)

c) En un elevador cuya capacidad no sobrepasa las 1320 libras, se sube una carga de 495 libras y varias personas que, en promedio, pesan 165 libras cada una.

Solución: x: cantidad de personas $165x + 495 \leq 1320$

d) El perímetro de un triángulo isósceles cuyos lados iguales miden cada uno el triple del lado desigual, es igual o mayor que 70 cm.

Solución: x: medida del lado desigual $x + 3x + 3x \geq 70$

Clase 4. Propiedades de las desigualdades

Ejemplo 2.8. Sume y reste 3 a ambos lados de $2 < 5$. ¿Qué obtiene?

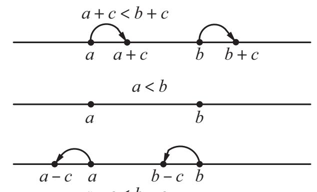
Solución: Sumando 3 a ambos lados: $2 + 3 < 5 + 3$ se obtiene $5 < 8$

Restando 3 a ambos lados: $2 - 3 < 5 - 3$ se obtiene $-1 < 2$

Sumando 3 a ambos lados de $2 < 5$ se obtiene $5 < 8$ y la dimensión entre los números no cambia, lo mismo ocurre si se resta 3 a ambos lados.

Si se suma o resta un mismo número a ambos miembros de una desigualdad se obtiene otra desigualdad con la misma dimensión.

Lo anterior se visualiza de la forma siguiente:



Propiedad 1:
Si $a < b$ entonces:
i) $a + c < b + c$
ii) $a - c < b - c$

En séptimo grado se estudiaron las propiedades de las igualdades para resolver ecuaciones lineales. Ahora se estudiarán las propiedades de las desigualdades para resolver inecuaciones.

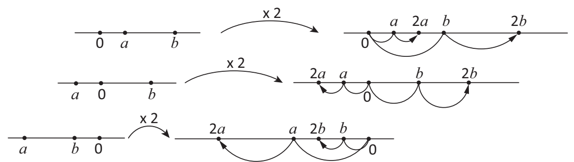
Se llama transponer el pasar un término de un lado al otro de la inecuación.

Ejemplo 2.9. Multiplique por 2 ambos lados de $2 < 5$ ¿Qué observa?

Solución: Al multiplicar por 2 ambos lados: $2(2) < 5(2)$ se obtiene $4 < 10$.

Si se multiplica por 2 ambos lados de $2 < 5$ se obtiene $4 < 10$; la dimensión entre los números no cambia.

Lo anterior se visualiza gráficamente como:



Unidad I • Lección 2 • Clase 4. Propiedades de las desigualdades 25

Ejemplo 2.8.
(10 min)

*Analizar que sucede cuando se suma o se resta un mismo número a ambos lados de una desigualdad numérica.

*Representar gráficamente esta situación para concluir con la Propiedad 1 de las desigualdades que dice:
"Si $a < b$ entonces:
i) $a + c < b + c$
ii) $a - c < b - c$."

Ejemplos 2.9 y 2.10
(15 min)

*Analizar que sucede cuando se multiplica o se divide por un mismo número (mayor que cero) ambos lados de una desigualdad numérica.

*Representar gráficamente estas situaciones para concluir con la Propiedad 2 de las desigualdades que dice:
"Si $a < b$ y $c > 0$ entonces:
i) $ac < bc$
ii) $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$."

Clase 4
(Continuación)

Ejemplo 2.11.
(10 min)

*Analizar que sucede cuando se multiplica o se divide por un mismo número (menor que cero) ambos lados de una desigualdad numérica.

*Representar gráficamente estas situaciones para concluir con la Propiedad 3 de las desigualdades que dice:

"Si $a < b$ y $c < 0$ entonces:

i) $ac > bc$

ii) $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$."

Ejercicio 2.4.
(10 min)

a) > b) <

c) < d) >

e) > f) <

Ejemplo 2.10. Divida entre 2 ambos lados de 2 < 5, ¿Qué obtiene?

Solución: Al dividir entre 2 ambos lados: $2 \div 2 < 5 \div 2$ se obtiene: $1 < \frac{5}{2}$.

Si se divide por 2 ambos lados de 2 < 5 se obtiene $1 < \frac{5}{2}$; la dimensión entre los números no cambia.

Si se multiplica o divide entre un mismo número positivo ambos miembros de una desigualdad se obtiene otra desigualdad con la misma dimensión.

Propiedad 2:
Si $a < b$ y $c > 0$ entonces:
i) $ac < bc$
ii) $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

Ejemplo 2.11. Multiplique y divida por – 2 ambos lados de 2 < 5.

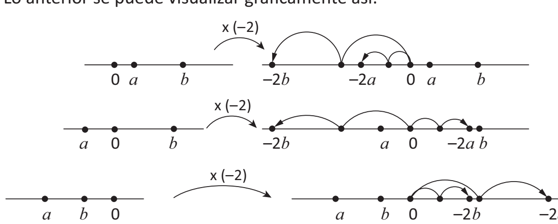
Solución: Al multiplicar por – 2 ambos lados: $2(-2) > 5(-2)$ se obtiene $-4 > -10$.

Al dividir entre – 2 ambos lados: $\frac{2}{-2} > \frac{5}{-2}$ se obtiene $-1 > -\frac{5}{2}$.

La relación de dimensión cambia pues al multiplicar 2 < 5 por – 2, se obtiene $-4 > -10$. Lo mismo sucede al dividir entre – 2, se obtiene $-1 > -\frac{5}{2}$.

Cuando ambos miembros de una desigualdad se multiplican o dividen entre un mismo número negativo, la relación de dimensión cambia.

Lo anterior se puede visualizar gráficamente así:



Propiedad 3: Si $a < b$ y $c < 0$ entonces:
i) $ac > bc$
ii) $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$

Ejercicio 2.4. Si $a < b$ escriba el signo adecuado en la casilla

a) $-2a$ ☐ $-2b$ b) $5a$ ☐ $5b$

c) $\frac{5}{7}a$ ☐ $\frac{5}{7}b$ d) $-\frac{1}{3}a$ ☐ $-\frac{1}{3}b$

e) $-a$ ☐ $-b$ f) $2a$ ☐ $2b$

26 | Unidad I • Lección 2 • Clase 4. Propiedades de las desigualdades

Objetivo: Resolver inecuaciones lineales usando tablas y aplicando los propiedades de las desigualdades.

Evaluación: Ejercicio 2.8, 2.9.

Unidad I. Lección 2.
Clase 5 y 6
(Continúa en la siguiente página)

Clase 5 y 6. Solución de inecuaciones lineales

Ejemplo 2.12. Complete la tabla de la izquierda que muestra los valores de x en la inecuación $x + 2 < 5$. ¿Qué valores satisfacen la inecuación?

Valor de x	Valor de $x + 2$	¿$x + 2 < 5$?
0	2	Sí
1		
2		
3		
4		
5		

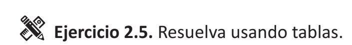
Solución:

Valor de x	Valor de $x + 2$	¿$x + 2 < 5$?
0	2	Sí
1	3	Sí
2	4	Sí
3	5	No
4	6	No
5	7	No

R: Los números 0, 1 y 2.

De la información de la tabla se deduce que los valores de x que satisfacen la inecuación son todos aquellos que son menores de 3.

La solución de una inecuación es el valor o valores de la variable que satisfacen la inecuación.
Resolver una inecuación consiste en encontrar su solución.

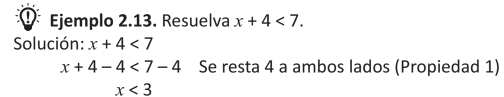


Ejercicio 2.5. Resuelva usando tablas.

a) $x + 2 \leq 4$ b) $2x - 1 \geq x + 4$ c) $3x \leq 2x + 3$ d) $x - 2 > -5$

Para resolver ecuaciones lineales se aplican las propiedades de la igualdad, de forma análoga se aplican las propiedades de la desigualdad para las inecuaciones.

Ejemplo 2.13. Resuelva $x + 4 < 7$.



Solución: $x + 4 < 7$

$x + 4 - 4 < 7 - 4$ Se resta 4 a ambos lados (Propiedad 1)

$x < 3$

CS: $\{x \in R, x < 3\}$

$x + 4 < 7$
$x < 7 - 4$
$x < 3$

Nota que el 4, que está sumando en la izquierda, pasa restando a la derecha.

CS: Conjunto solución.

Ejercicio 2.6. Resuelva:

a) $x + 4 < 6$ b) $x - 2 \leq -5$ c) $x - 3 > -7$ d) $x - 7 \geq 10$

Unidad I • Lección 2 • Clase 5 y 6. Solución de inecuaciones lineales | 27

 **Ejemplo 2.12.**
(10 min)
*Dando los valores indicados a x encontrar aquellos números que satisfacen la inecuación.
*Concluir que las inecuaciones se pueden resolver usando tablas.
*Concluir con la solución de una inecuación.

 **Ejercicio 2.5.**
(10 min)
a) $x \leq 2$
b) $x \geq 5$
c) $x \leq 3$
d) $x > -3$

 **Ejemplo 2.13**
(10 min)
*Concluir que las inecuaciones también se pueden resolver aplicando las propiedades de las desigualdades.
*En esta parte sólo se aplica la Propiedad 1 de las desigualdades.

 **Ejercicio 2.6.**
(10 min)
a) $x < 2$
b) $x \leq -3$
c) $x > -4$
d) $x \geq 17$

Clase 5 y 6
(Continuación)

 **Ejemplo 2.14.**
(10 min)
*Se aplican la Propiedad 1 y la Propiedad 2 de las desigualdades.

 **Ejercicio 2.7.**
(10 min)
a) $x \leq -10$ b) $x \geq -6$
c) $x < 2$ d) $x > \frac{1}{3}$

 **Ejemplo 2.15**
(5 min)
*Se aplica además la Propiedad 3 de las desigualdades.

 **Ejercicio 2.8.**
(10 min)
a) $x > -5$ b) $x \geq -4$
c) $x < -\frac{1}{3}$ d) $x \geq -\frac{1}{5}$

 **Ejemplo 2.16.**
(5 min)
*Se aplica además la propiedad distributiva.

 **Ejercicio 2.9.**
(10 min)
a) $x < 2$ b) $x \leq 5$
c) $x < -3$ d) $x \geq -\frac{39}{10}$

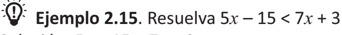
Ejemplo 2.14. Resuelva $4x - 6 > 2$
Solución 1: $4x - 6 > 2$
$4x > 2 + 6$ … trasladan – 6 al lado derecho
$4x > 8$
$\frac{4x}{4} > \frac{8}{4}$ … se divide entre 4 (Propiedad 2)
$x > 2$
CS: $\{x \in R, x > 2\}$

Solución 2: $4x - 6 > 2$ también se puede resolver así:
$4x > 2 + 6$
$4x > 8$
$x > \frac{8}{4}$ … el 4 que multiplica a x pasa a dividir al otro lado
$x > 2$



Una inecuación lineal es una desigualdad que puede transformarse a la forma $ax + b < 0$ donde $a \neq 0$. El signo < puede sustituirse por ≤, > o ≥.

Ejercicio 2.7. Resuelva:
a) $4x + 8 \leq 2x - 12$ b) $3x - 2 \geq x - 14$
c) $2x - 7 < -3x + 3$ d) $5x - 4 > 2x - 3$



Ejemplo 2.15. Resuelva $5x - 15 < 7x + 3$
Solución: $5x - 15 < 7x + 3$
$5x - 7x < 3 + 15$
$-2x < 18$
$\frac{-2x}{-2} > \frac{18}{-2}$ … Se divide entre – 2 (Propiedad 3)
$x > -9$



Al dividir o multiplicar por un número negativo, el sentido de la desigualdad cambia.

Ejercicio 2.8. Resuelva:
a) $x - 9 < 3x + 1$ b) $4x + 7 \geq 2x - 1$
c) $-6x - 8 > -3x - 7$ d) $2x - 10 \leq 7x - 9$

Ejemplo 2.16. Resuelva $2(x + 4) \leq 2(3x - 10)$.
Solución: $2(x + 4) \leq 2(3x - 10)$
$2x + 8 \leq 6x - 20$ … propiedad distributiva
$2x - 6x \leq -20 - 8$ … transponer 8 y $6x$
$-4x \leq -28$ … se divide entre –4
$x \geq 7$

Ejercicio 2.9. Resuelva:
a) $3(2x - 1) < 2x + 5$ b) $-2(-2x + 4) \leq x + 7$
c) $-4(x - 3) > -3(x - 5)$ d) $-9(-2x - 3) \geq 4(2x - 3)$

28 | Unidad I • Lección 2 • Clase 5 y 6. Solución de inecuaciones lineales

Objetivo: Resolver problemas usando inecuaciones lineales.

Evaluación: Ejercicio 2.10.

Unidad I. Lección 2.

Clase 7 y 8

(Continúa en la siguiente página)

Clase 7 y 8. Resolver problemas usando inecuaciones lineales

Ejemplo 2.17. Un camión puede llevar hasta 1000 kg. Si tiene una carga que pesa 200 kg, ¿Cuántas cajas podrá llevar si éstas pesan 30 kg cada una?

Solución: x: Cantidad de cajas; Inecuación: $30x + 200 \leq 1000$

$$30x + 200 \leq 1000$$
$$30x \leq 1000 - 200$$
$$x \leq \frac{800}{30}$$
$$x \leq 26.66\ldots$$

R: Podrá llevar hasta 26 cajas.

Ejemplo 2.18. 8 veces un número disminuido en 15 es mayor o igual que 81. ¿Cuál es el número?

Solución: x: El número; Inecuación: $8x - 15 \geq 81$

$$8x - 15 \geq 81$$
$$8x \geq 81 + 15$$
$$x \geq \frac{96}{8}$$
$$x \geq 12$$

R: El número es 12 o cualquiera mayor que 12.

Ejemplo 2.19. El perímetro de un rectángulo no sobrepasa los 100 cm. Si el largo es 3 veces el ancho ¿qué valores puede tomar el ancho de este rectángulo?

$3x$

x

Solución: x: el ancho; Inecuación: $x + 3x + x + 3x \leq 100$

$$x + 3x + x + 3x \leq 100$$
$$8x \leq 100$$
$$x \leq \frac{100}{8}$$
$$x \leq 12.5$$

R: Cualquier valor menor o igual que 12.5 cm

Ejercicio 2.10. Resuelva los siguientes ejercicios:

a) La capacidad de un camión es 20 000 libras. Su carga consiste en 5 bloques que pesan 210 libras cada uno y una cantidad de cajas de 700 libras cada una. ¿Cuántas cajas puede llevar el camión?

b) Un elevador tiene capacidad para transportar hasta 2 000 libras. Si el promedio de peso de las personas es de 150 libras, ¿cuántas personas caben en el elevador?

c) 2 veces un número menos 1 es menor que 20. ¿Qué se concluye de ese número?

 **Ejemplo 2.17.**

(10 min)

*Identificar los datos del problema.

*Nombrar la "cantidad de cajas" con una variable para establecer la inecuación.

*Resolver la inecuación y concluir que el número máximo de cajas que puede llevar el camión es 26.

 **Ejemplos 2.18 y 2.19.**

(15 min)

*Realizarlos de forma similar a como se desarrolló el Ejemplo anterior.

 **Ejercicio 2.10.**

(65 min)

a) Puede llevar un máximo de 27 cajas.

b) Caben un máximo de 13 personas en el elevador.

c) Se concluye que puede ser menor que 10.5

Unidad I. Lección 2.

Clase 8
(Continuación)

Clase 9
(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: Resolver sistemas de inecuaciones lineales en una variable.

Evaluación: Ejercicio 2.13.

d) 38 mables es la cantidad mínima.
e) Los números menores que 5.71
f) 1) Cantidad máxima 16 cuadernos.
   2) Sí
   3) No
g) Debe obtener como mínimo 77 puntos.
h) Los números menores que 96.
i) El caballo puede llevar 11 bolsas.

[Hasta aquí Clase 8]

[Desde aquí Clase 9]

d) En una bolsa que pesa 50 g se agregan mables que pesan 20 g cada uno. Ahora el peso de la bolsa es mayor que 800 g. ¿Cuál es la cantidad mínima de mables que se pueden agregar a la bolsa?

e) Siete veces un número es menor que 40. ¿Cuáles podrán ser los valores de esos números?

f) En una caja que pesa 200 gramos se colocan x cuadernos que pesan 80 gramos cada uno. El peso total es menor o igual que 1500 g. ¿Cuál es la cantidad máxima de cuadernos que caben en la caja? ¿Se podrán colocar 12 cuadernos? ¿Se podrán colocar 20 cuadernos?

g) Un estudiante necesita para aprobar su curso un promedio mínimo de 80. En los primeros tres exámenes obtuvo 72, 80 y 91. ¿Qué calificación debe obtener en el cuarto examen para aprobar el curso?

h) Halle los números enteros cuya cuarta parte aumentada en 10 es mayor que su tercio aumentado en 2.

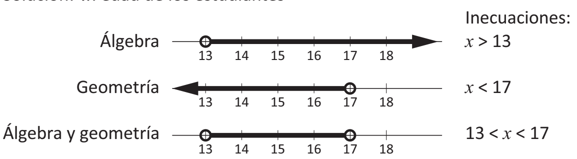
i) La capacidad de carga de un caballo no supera las 200 libras. En su lomo lleva un niño que pesa 30 libras y una cantidad de bolsas que pesan 15 libras cada una. ¿Cuántas bolsas podrá llevar el caballo?

Clase 9. Sistema de inecuaciones lineales en una variable

Ejemplo 2.20. En los siguientes anuncios se presentan los requisitos de edad para que los estudiantes asistan a los diferentes eventos del campeonato de verano de matemáticas:

Álgebra	Geometría	Cálculo
Estudiantes mayores de 13 años.	Estudiantes menores de 17 años.	Estudiantes mayores de 16 años.

¿Qué estudiantes podrán asistir a los eventos de álgebra y geometría?
Solución: x: edad de los estudiantes



R: A los eventos de álgebra y geometría podrán asistir los estudiantes que tienen más de 13 años pero al mismo tiempo tienen menos de 17 años.

Se pueden resolver estas dos inecuaciones representando cada una como un intervalo en forma gráfica y después encontrar su parte común.

30 | Unidad I • Lección 2 • Clase 9. Sistema de inecuaciones lineales en una variable

Ejemplo 2.20.
(10 min)
*Establecer la situación de las edades de los estudiantes con inecuaciones.

*Representar gráficamente cada una de las inecuaciones determinando su solución para luego establecer las soluciones comunes.

*Concluir que cuando se buscan las soluciones comunes a dos inecuaciones lineales se forma un sistema de inecuaciones lineales.

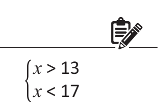
*Concluir con la solución de un sistema de inecuaciones lineales.

Clase 9
(Continuación)

(Continúa en la siguiente página)

Cuando se buscan soluciones comunes a dos inecuaciones lineales en una variable, se colocan de la siguiente manera y se le llama **sistema de inecuaciones lineales en una variable**.

$$\begin{cases} x > 13 \\ x < 17 \end{cases}$$

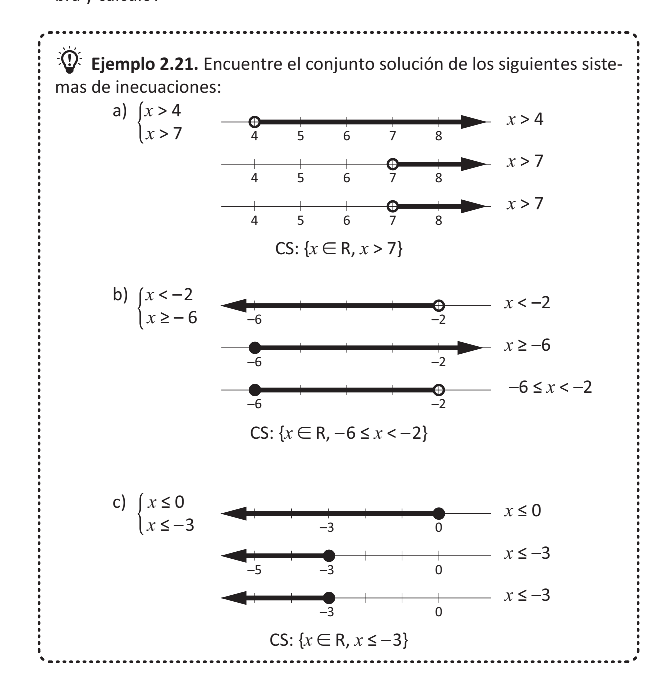


$\begin{cases} x > 13 \\ x < 17 \end{cases}$ es un sistema de inecuaciones lineales en una variable.

Un **sistema de inecuaciones lineales** en una variable es una pareja de inecuaciones lineales en una variable.
La solución de un sistema de inecuaciones lineales en una variable son los valores de la variable que satisfacen simultáneamente las dos inecuaciones.
Resolver un sistema de inecuaciones lineales en una variable es encontrar su solución.

Ejercicio 2.11. ¿Qué estudiantes podrán asistir a los eventos de álgebra y cálculo?

Ejemplo 2.21. Encuentre el conjunto solución de los siguientes sistemas de inecuaciones:



Unidad I • Lección 2 • Clase 9. Sistema de inecuaciones lineales en una variable | 31

Ejercicio 2.11.
(5 min)
$\{x | x \in \mathbb{R}, x > 16\}$
Los estudiantes mayores de 16 años.

Ejemplo 2.21.
(5 min)
*Representar gráficamente cada sistema de inecuaciones lineales y determinar su conjunto solución.

Clase 9
(Continuación)

(Continúa en la siguiente página)

 **Ejercicio 2.12.**

(5 min)

a) $\{x | x \in \mathbb{R}, 0 < x \leq 3\}$

b) $\{x | x \in \mathbb{R}: x \geq 4\}$

c) $\varnothing$

d) $\{x | x \in \mathbb{R}: -5 < x \leq -1\}$

e) $\{x | x \in \mathbb{R}: x \leq 7\}$

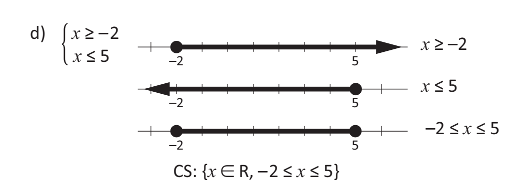
f) $\{x | x \in \mathbb{R}: 0 \leq x < 7\}$

 **Ejemplo 2.22.**

(10 min)

*Convertir las inecuaciones dadas en inecuaciones más sencillas (de la forma $a < b$ donde el signo < puede ser cualquiera de los signos de desigualdad), luego graficarlas para encontrar su conjunto solución.

d) $\begin{cases} x \geq -2 \\ x \leq 5 \end{cases}$



CS: $\{x \in \mathbb{R}, -2 \leq x \leq 5\}$

Ejercicio 2.12. Encuentre el conjunto solución de:

a) $\begin{cases} x \leq 3 \\ x > 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x \geq 4 \\ x > 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x \geq 4 \\ x \leq -1 \end{cases}$

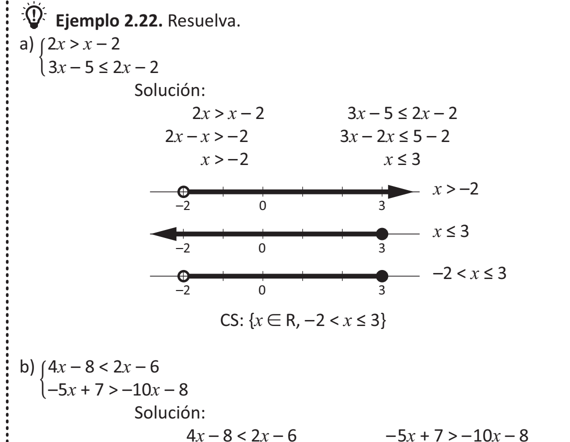
d) $\begin{cases} x > -5 \\ x \leq -1 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x \leq 7 \\ x \leq 12 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x \geq 0 \\ x < 7 \end{cases}$

Ejemplo 2.22. Resuelva.

a) $\begin{cases} 2x > x - 2 \\ 3x - 5 \leq 2x - 2 \end{cases}$

Solución:

$2x > x - 2$	$3x - 5 \leq 2x - 2$
$2x - x > -2$	$3x - 2x \leq 5 - 2$
$x > -2$	$x \leq 3$



CS: $\{x \in \mathbb{R}, -2 < x \leq 3\}$

b) $\begin{cases} 4x - 8 < 2x - 6 \\ -5x + 7 > -10x - 8 \end{cases}$

Solución:

$4x - 8 < 2x - 6$	$-5x + 7 > -10x - 8$
$4x - 2x < 8 - 6$	$-5x + 10x > -7 - 8$
$2x < 2$	$5x > -15$
$x < 1$	$x > -3$

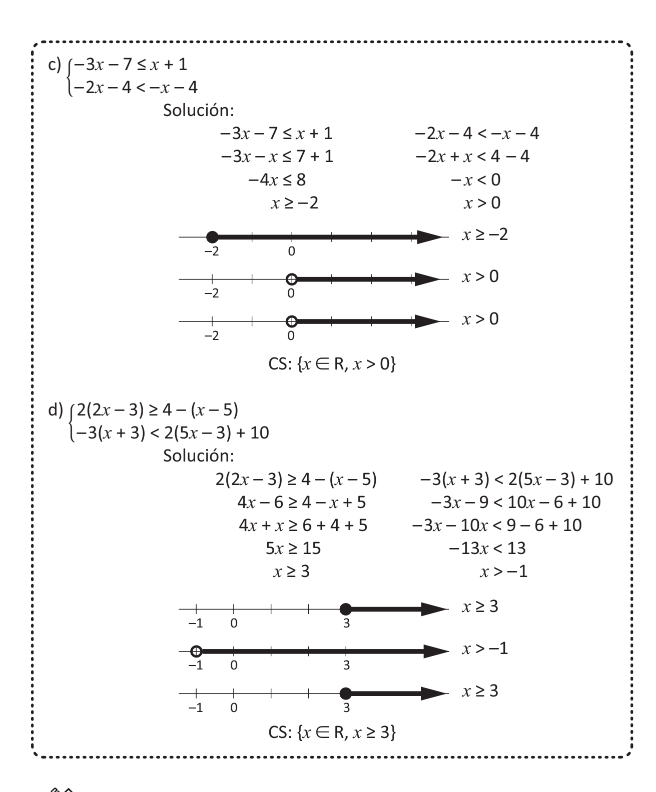
$x < 1$

$x > -3$

$-3 < x < 1$

CS: $\{x \in \mathbb{R}, -3 < x < 1\}$

32 | Unidad I • Lección 2 • Clase 9. Sistema de inecuaciones lineales en una variable



c) $\begin{cases} -3x - 7 \leq x + 1 \\ -2x - 4 < -x - 4 \end{cases}$

Solución:

$-3x - 7 \leq x + 1$ | $-2x - 4 < -x - 4$
$-3x - x \leq 7 + 1$ | $-2x + x < 4 - 4$
$-4x \leq 8$ | $-x < 0$
$x \geq -2$ | $x > 0$

CS: $\{x \in R, x > 0\}$

d) $\begin{cases} 2(2x - 3) \geq 4 - (x - 5) \\ -3(x + 3) < 2(5x - 3) + 10 \end{cases}$

Solución:

$2(2x - 3) \geq 4 - (x - 5)$ | $-3(x + 3) < 2(5x - 3) + 10$
$4x - 6 \geq 4 - x + 5$ | $-3x - 9 < 10x - 6 + 10$
$4x + x \geq 6 + 4 + 5$ | $-3x - 10x < 9 - 6 + 10$
$5x \geq 15$ | $-13x < 13$
$x \geq 3$ | $x > -1$

CS: $\{x \in R, x \geq 3\}$

Ejercicio 2.13. Resuelva.

a) $\begin{cases} -4x - 6 < -5x - 2 \\ 7x - 8 > 6x - 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - 6 > x - 4 \\ -3x - 5 < -4x + 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - 6 < -2x + 2 \\ x + 7 \geq -2x - 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 7x + 2 < 2x - 8 \\ 5x - 7 \leq -2x + 7 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3x - 5 < 4x - 2 \\ 4x + 3 > 6x - 1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 5x - 2 < 7x + 4 \\ -4x + 3 \leq x - 2 \end{cases}$

g) $\begin{cases} -2(3x - 1) < -4x \\ 3x < 3(3x - 4) \end{cases}$

h) $\begin{cases} 4(x - 2) > 3 - (2x - 1) \\ -5(2x - 3) < 2(3x - 10) + 3 \end{cases}$

Unidad I • Lección 2 • Clase 9. Sistema de inecuaciones lineales en una variable | 33

Ejercicio 2.13.
(10 min)
*Aplicar la propiedad distributiva, luego convertir las inecuaciones dadas en inecuaciones más sencillas para después graficarlas y encontrar su conjunto solución.

a) $\{x | x \in \mathbb{R}, 3 < x < 4\}$

b) $\{x | x \in \mathbb{R}, 2 < x < 6\}$

c) $\{x | x \in \mathbb{R}, -3 \leq x < 2\}$

d) $\{x | x \in \mathbb{R}, x < -2\}$

e) $\{x | x \in \mathbb{R}, -3 < x < 2\}$

f) $\{x | x \in \mathbb{R}, x \geq 1\}$

g) $\{x | x \in \mathbb{R}, x > 2\}$

h) $\{x | x \in \mathbb{R}, x > 2\}$

Unidad I. Lección 2.

Clase 10 y 11

(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: Definir una ecuación cuadrática y su conjunto solución.
Resolver ecuaciones cuadráticas utilizando la factorización.

Evaluación: Ejercicio 2.15

Ejemplo 2.23
(15 min)
Comprender y resolver el problema.

*Hacer una representación gráfica del problema.

*Nombrar la hipotenusa como x y de ella nombrar los catetos.

*Plantear la ecuación:
$(x-1)^2 + (x-2)^2 = x^2$
aplicando el teorema de Pitágoras.

*Desarrollar la ecuación anterior y transponer todos los términos al lado izquierdo. Llamar a esa expresión "ecuación de segundo grado o ecuación cuadrática".

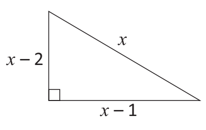
Definir una ecuación cuadrática.
(5 min)

*Hacer énfasis que en la expresión
$ax^2 + bx + c = 0$,
el coeficiente "a" debe ser distinto de 0.

Clase 10 y 11. Ecuaciones de segundo grado

Ejemplo 2.23.
Un terreno tiene la forma de un triángulo rectángulo. El cateto más corto mide 2 m menos que la longitud de la hipotenusa y el cateto más largo mide 1 m menos que la longitud de su hipotenusa. Determine las longitudes de los tres lados del terreno.

Solución:
Sea x la longitud en metros de la hipotenusa.
$x-1$: Longitud del cateto largo.
$x-2$: Longitud del cateto corto.



Aplicando el Teorema de Pitágoras se tiene que:
$(x-1)^2 + (x-2)^2 = x^2$

Al desarrollar los productos y trasponer los términos al lado izquierdo queda:

$x^2 - 2x + 1 + x^2 - 4x + 4 - x^2 = 0$
$x^2 - 6x + 5 = 0$

A la expresión $x^2 - 6x + 5 = 0$ se le llama ecuación de segundo grado o ecuación cuadrática.

Una ecuación de segundo grado o ecuación cuadrática es toda ecuación que se puede escribir de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ donde a, b y c son números reales y $a \neq 0$.

Sustituya los valores 4, 5 y 6 correspondiente a x en la ecuación $x^2 - 6x + 5 = 0$. ¿Qué valores la satisfacen?

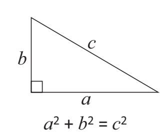
$x = 4 \rightarrow 4^2 - 6(4) + 5 = 0; \quad -3 \neq 0$
$x = 5 \rightarrow 5^2 - 6(5) + 5 = 0; \quad 0 = 0$
$x = 6 \rightarrow 6^2 - 6(6) + 5 = 0; \quad 5 \neq 0$

El valor $x = 5$ satisface la ecuación. Por lo que la hipotenusa mide 5 m; el cateto mayor mide $x - 1 = 5 - 1 = 4$ metros y el cateto menor mide $x - 2 = 5 - 2 = 3$ metros.

El conjunto de valores de la incógnita que satisfacen la ecuación cuadrática se llama solución.



Teorema de Pitágoras.



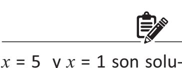
$a^2 + b^2 = c^2$



En la ecuación:
$x^2 - 6x + 5 = 0$, el lado izquierdo es un polinomio y el lado derecho es 0.
Si a = 0 en la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ nos queda de la forma $bx + c = 0$, y esta es una ecuación lineal o de grado 1.

34 | Unidad I • Lección 2 • Clase 10 y 11. Ecuaciones de segundo grado

Ejercicio 2.14.
Pruebe si $x = 1$ satisface la ecuación $x^2 - 6x + 5 = 0$. ¿Es $x = 1$ solución de la ecuación? ¿Qué valores son solución de la ecuación?



$x = 5$ y $x = 1$ son solución de $x^2 - 6x + 5 = 0$

Ejemplo 2.24.
Al factorizar el lado izquierdo de la ecuación $x^2 - 6x + 5 = 0$ ¿Qué valores de x hacen que ese lado sea cero?

$x^2 - 6x + 5 = 0$	$x^2 - 6x + 5 = 0$
$(x - 5)(x - 1) = 0$	$(x - 5)(x - 1) = 0$
$(5 - 5)(5 - 1) = 0$	$(1 - 5)(1 - 1) = 0$
$0(4) = 0$	$-4(0) = 0$
$0 = 0$	$0 = 0$

$x = 5$, (obtenido de $x - 5 = 0$) y $x = 1$ (obtenido de $x - 1 = 0$) hacen que el lado izquierdo de la ecuación $x^2 - 6x + 5 = 0$ sea cero; es decir cuando uno de los factores es cero.

Propiedad del Factor cero: Si $ab = 0$ entonces $a = 0$ ó $b = 0$ o ambos.

Ejemplo 2.25.
Encuentre la solución de las siguientes ecuaciones cuadráticas aplicando la factorización.

a) $x^2 + 5x = -6$
$x^2 + 5x + 6 = 0$ ……………… igualando a cero.
$(x + 3)(x + 2) = 0$
$x + 3 = 0$ ó $x + 2 = 0$ ……… aplicando la propiedad del factor cero.
$x = -3$ ó $x = -2$
CS: $\{-3, -2\}$

b) $4x^2 = 9$
$4x^2 - 9 = 0$
$(2x - 3)(2x + 3) = 0$
$2x - 3 = 0$ ó $2x + 3 = 0$
$x = \frac{3}{2}$ ó $x = \frac{-3}{2}$
CS: $\left\{\pm\frac{3}{2}\right\}$

c) $3x^2 = 7x + 6$
$3x^2 - 7x - 6 = 0$
$(3x + 2)(x - 3) = 0$
$3x + 2 = 0$ ó $x - 3 = 0$
$x = \frac{-2}{3}$ ó $x = 3$
CS: $\left\{\frac{-2}{3}, 3\right\}$

Unidad I • Lección 2 • Clase 10 y 11. Ecuaciones de segundo grado | 35

Ejemplo 2.25. (8 min). *Hacer énfasis en los distintos tipos de factorización aplicados en cada ecuación cuadrática.
a) Tanteo simple b) Diferencia de cuadrados
c) Tanteo compuesto

Encontrar el conjunto solución de una ecuación cuadrática sustituyendo valores. (7 min)

*Sustituir los valores 4, 5 y 6 como valores de x en la ecuación
$$x^2 - 6x + 5 = 0.$$

*Concluir que el valor de $x = 5$ satisface la ecuación y que este valor se convierte en parte del conjunto solución de la ecuación.

*Definir el conjunto solución de una ecuación cuadrática.

Ejercicio 2.14.
(3 min) Solución
Satisface la ecuación
$$CS = \{1,5\}$$

Ejemplo 2.24.
(7 min)
*Factorizar el lado izquierdo de la ecuación.

*Aplicar la propiedad del factor cero para encontrar los valores que forman parte del conjunto solución de la ecuación.

*Concluir que se puede encontrar el conjunto solución de una ecuación cuadrática aplicando la factorización.

Clase 10 y 11
(Continuación)

d) Factor común y diferencia de cuadrados.
e) Factor común y tanteo simple.

 **Ejercicio 2.15.**
(45 min) Solución

a) C S = {–2, –7}

b) C S = {6, –2}

c) C S = {±7}

d) C S = {±9}

e) C S = $\left\{\frac{10}{3}\right\}$

f) C S = $\left\{\pm\frac{1}{2}\right\}$

g) C S = $\left\{4+4\sqrt{2}, 4-\sqrt{2}\right\}$

h) C S = $\left\{\frac{3}{5}, -\frac{5}{2}\right\}$

i) C S = $\left\{\frac{3}{4}, \frac{5}{2}\right\}$

j) C S = {4, –2}

k) C S = $\left\{\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right\}$

l) C S = $\left\{\frac{2}{3}, -\frac{5}{2}\right\}$

m) C S = {0, –4}

n) C S = {2, 8}

ñ) C S = $\left\{3, -\frac{1}{2}\right\}$

o) C S = {±1}

d) $3x^2 = 75$
$3x^2 - 75 = 0$
$3(x^2 - 25) = 0$
$x^2 - 25 = 0$
$(x - 5)(x + 5) = 0$
$x - 5 = 0$ ó $x + 5 = 0$
$x = 5$ ó $x = -5$
CS: {±5}

e) $3x^2 + 6x = 45$
$3x^2 + 6x - 45 = 0$
$3(x^2 + 2x - 15) = 0$
$x^2 + 2x - 15 = 0$
$(x + 5)(x - 3) = 0$
$x + 5 = 0$ ó $x - 3 = 0$
$x = -5$ ó $x = 3$
CS: { –5, 3}

Ejercicio 2.15.
Encuentre el conjunto solución por factorización de las siguientes ecuaciones cuadráticas.

a) $x^2 + 9x + 14 = 0$ b) $x^2 - 4x = 12$

c) $x^2 = 49$ d) $x^2 - 81 = 0$

e) $9x^2 - 100 = 0$ f) $-4x^2 = -1$

g) $3x^2 - 24x = 48$ h) $10x^2 = -19x + 15$

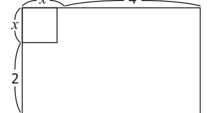
i) $-8x^2 + 26x - 15 = 0$ j) $2x^2 - 4x = 16$

k) $3x^2 = 19x - 20$ l) $6x^2 + 11x = 10$

m) $(x + 2)^2 = 4$ n) $(x - 5)^2 - 9 = 0$

ñ) $6x^2 - 15x - 9 = 0$ o) $x^2 - 1 = 0$

p) En un cuadrado se extiende el lado vertical 2 cm y el lado horizontal 4 cm para obtener un rectángulo cuya área mide tres veces el área del cuadrado ¿Cuánto mide el área del cuadrado?



q) Hay dos números. La suma de ellos es 13 y la suma de los cuadrados es 85. ¿Cúales son esos números?

36 | Unidad I • Lección 2 • Clase 10 y 11. Ecuaciones de segundo grado

p) $3x^2 = (x + 4)(x + 2)$ Respuesta: 4 cm

q) $x^2 + (13 - x)^2 = 85$ Respuesta: 7 y 6

Objetivo: Deducir la fórmula cuadrática.
Resolver ecuaciones cuadráticas utilizando la fórmula cuadrática.

Evaluación: Ejercicio 2.16

Unidad I. Lección 2.

Clase 12 y 13

(Continúa en la siguiente página)

Clase 12 y 13. Fórmula Cuadrática

Ejemplo 2.26.
Pensar en la manera de resolver la ecuación cuadrática en la forma más general $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$ comparándola con la resolución de $4x^2 + 7x + 1 = 0$

$4x^2 + 7x + 1 = 0$	$ax^2 + bx + c = 0$
$4x^2 + 7x = -1$, transponer 1	$ax^2 + bx = -c$ transponer c
$x^2 + \frac{7}{4}x = -\frac{1}{4}$ dividiendo entre 4	$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$, dividiendo entre a
$x^2 + \frac{7}{4}x + \left(\frac{\frac{7}{4}}{2}\right)^2 = -\frac{1}{4} + \left(\frac{\frac{7}{4}}{2}\right)^2$ ...	$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{\frac{b}{a}}{2}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{\frac{b}{a}}{2}\right)^2$ ...
... Sumar $\left(\frac{\frac{7}{4}}{2}\right)^2 = \left(\frac{7}{8}\right)^2$ a ambos lados.	... Sumar $\left(\frac{\frac{b}{a}}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2$ a ambos lados
$x^2 + \frac{7}{4}x + \left(\frac{7}{8}\right)^2 = \frac{33}{64}$	$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$
$\left(x + \frac{7}{8}\right)^2 = \frac{33}{64}$ factorizado por TCP.	$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ factorizando por TCP.
$\left(x + \frac{7}{8}\right) = \pm\frac{\sqrt{33}}{8}$ extrayendo raíz cuadrada.	$x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ extrayendo raíz cuadrada.
$x = \frac{-7}{8} \pm \frac{\sqrt{33}}{8}$ despejando x.	$x = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ despejando x
$x = \frac{-7 \pm \sqrt{33}}{8}$	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$b^2 - 4ac \geq 0$, significa que no es negativo, ya que si lo fuera su raíz cuadrada no estaría definida en el conjunto de los números reales.

Ejemplo 2.27.
Resuelva $x^2 + 8x = -6$ usando la fórmula cuadrática.
Solución:
$x^2 + 8x = -6$
$x^2 + 8x + 6 = 0$, $a = 1$, $b = 8$, $c = 6$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{(-8) \pm \sqrt{8^2 - 4(1)(6)}}{2(1)} = \frac{-8 \pm \sqrt{40}}{2} = \frac{-8 \pm 2\sqrt{10}}{2} = -4 \pm \sqrt{10}$$

Conjunto solución $-4 + \sqrt{10}$, $-4 - \sqrt{10}$

Unidad I • Lección 2 • Clase 12 y 13. Fórmula Cuadrática | 37

Ejemplo 2.26.
(25 min)
Deducir la fórmula cuadrática de la ecuación cuadrática escrita en su forma general
($ax^2 + bx + c = 0$)
comparándola con la solución de la ecuación
$4x^2 + 7x + 1 = 0$.

*Siguiendo paso a paso la solución de la ecuación $4x^2 + 7x + 1 = 0$, deducir la solución general de una ecuación cuadrática escrita en su forma general.

*Concluir que la expresión $b^2 - 4ac$ debe ser mayor que cero para que la ecuación cuadrática tenga solución en el conjunto de los números reales.

*Recordar que no existen las raíces cuadradas de números negativos en el conjunto de los números reales.

Definir las soluciones de una ecuación cuadrática utilizando la fórmula cuadrática.
(5 min)

 **Ejemplo 2.27.** (10 min).
*Igualar a cero la ecuación cuadrática dada.
*Identificar los valores de a, b y c.
*Aplicar la fórmula cuadrática y encontrar el conjunto solución.

Clase 12 y 13
(Continuación)



Ejemplo 2.28.
(5 min)



Ejercicio 2.16.
(45 min) Solución

a) C S = $\left\{-\frac{1}{2}+\sqrt{2}, -\frac{1}{2}-\sqrt{2}\right\}$

b) C S = $\left\{-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{105}}{6}, -\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{105}}{6}\right\}$

c) C S = $\left\{2+\sqrt{7}, 2-\sqrt{7}\right\}$

d) C S = $\left\{\frac{1+\sqrt{21}}{2}, \frac{1-\sqrt{21}}{2}\right\}$

e) C S = $\left\{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{85}}{10}, \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{85}}{10}\right\}$

f) C S = $\left\{-1+\sqrt{2}, -1-\sqrt{2}\right\}$

g) C S = $\left\{2+\sqrt{2}, 2-\sqrt{2}\right\}$

h) C S = $\left\{1+\frac{\sqrt{15}}{3}, 1-\frac{\sqrt{15}}{3}\right\}$

Ejemplo 2.28.
Resuelva $5x^2 - 4x - 1 = 0$, usando la fórmula cuadrática.
Solución:
$a = 5$, $b = -4$, $c = -1$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(5)(-1)}}{2(5)} = \frac{4 \pm \sqrt{36}}{10}$$

$$= \frac{4 \pm 6}{10},$$

$$x_1 = \frac{4+6}{10} = \frac{10}{10} = 1, \quad x_2 = \frac{4-6}{10} = \frac{-2}{10} = -\frac{1}{5}$$

CS: $\left\{1, -\frac{1}{5}\right\}$

$5x^2 - 4x - 1 = 0$ se puede resolver por factorización como:
$5x^2 - 4x - 1 = 0$
$(5x + 1)(x - 1) = 0$
$5x + 1 = 0$ ó $x - 1 = 0$
$x = -\frac{1}{5}$ ó $x = 1$

CS: $\left\{1, -\frac{1}{5}\right\}$

Ejercicio 2.16.
Aplicando la fórmula cuadrática encuentre el conjunto solución de las siguientes ecuaciones cuadráticas.

a) $2x^2 - 7x + 1 = 0$

b) $3x^2 = -9x + 2$

c) $x^2 - 4x = 3$

d) $x^2 = x + 5$

e) $5x^2 - 5x - 3 = 0$

f) $x^2 = -2x + 1$

g) $x(x - 2) = 2x - 2$

h) $3x(x - 2) + 4 = 6$

38 | Unidad I • Lección 2 • Clase 12 y 13. Fórmula Cuadrática

Objetivo: Ubican puntos en el sistema de coordenadas cartesianas (plano cartesiano).

Evaluación: Ejercicio 2.16

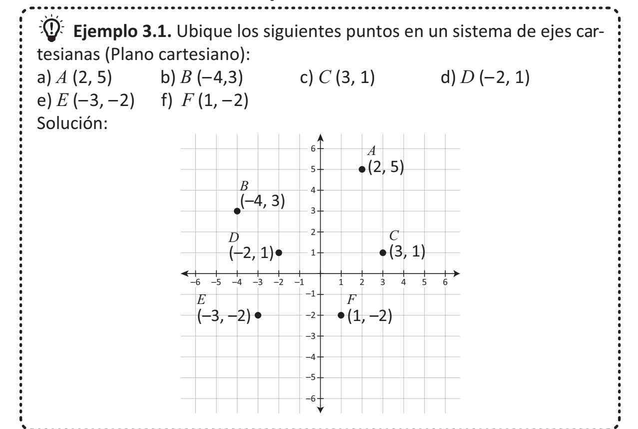
Unidad I. Lección 3.
Clase 1
(Continúa en la siguiente página)

Lección 3. Coordenadas planas
Clase 1. Coordenadas planas

Ejemplo 3.1. Ubique los siguientes puntos en un sistema de ejes cartesianas (Plano cartesiano):

a) A (2, 5) b) B (−4,3) c) C (3, 1) d) D (−2, 1)
e) E (−3, −2) f) F (1, −2)

Solución:



[A]

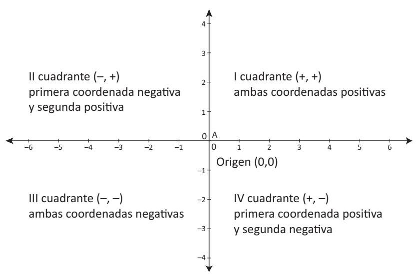
En octavo grado aprendieron a ubicar puntos en el plano cartesiano.

El plano cartesiano está formado por dos rectas numéricas perpendiculares, una horizontal y la otra vertical que se cortan en un punto.

> En el plano cartesiano a la recta horizontal se le llama eje x o eje de las abcisas y la recta vertical eje y o eje de las ordenadas. A los dos ejes juntos se les denomina sistema de coordenadas cartesianas. Al punto de intersección de los dos ejes se le llama origen del sistema de coordenadas cartesianas.

Los segmentos de 0 al 1 en ambas rectas miden lo mismo, esta distancia debe ser la misma para cualquier par de números consecutivos. Los puntos que se grafican en el plano cartesiano se le llama pares ordenados (a, b).

Un par ordenado (a, b) está compuesto por una coordenada para x y otra coordenada para y.
El plano cartesiano está dividido en cuatro cuadrantes.



Para ubicar un par ordenado (a, b) en el plano cartesiano se traza un segmento vertical que pase por a y un segmento horizontal que pase por b y en la intersección de los segmentos se ubica (a, b).
El origen está formado por el par ordenado (0, 0).

*Es importante verificar que los estudiantes hagan correctamente la ubicación de los puntos en el plano cartesiano, ya que será de mucha utilidad cuando se estén graficando funciones.

[A]

Ejemplo 3.1
(20 min)
*Poner en la pizarra los pares ordenados y pedir que los ubiquen en el plano cartesiano.
M: ¿Cómo se forma un plano cartesiano?
RP: Dos rectas que se intersecan de forma perpendicular

M: ¿Cómo ubicamos pares ordenados en el plano cartesiano?

Concluye que se traza segmento vertical que pase por la coordenada de x y un segmento horizontal que pase por y, donde se intersecten los segmentos se ubica el punto.

Hacer énfasis en los nombres que reciben los ejes

Concluir en las partes del plano cartesiano (cuadrantes, ejes, origen).

Clase 1
(Continuación)

(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: **[B]** Identificar las coordenadas de un punto en el plano cartesiano.

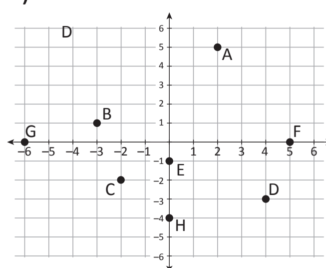
Evaluación: Ejercicio 3.1

[B]

Ejemplo 3.2
(10 min)
M: ¿Cuál es la coordenada de x del punto P?
RP:2
M: ¿Cuál es la coordenada de y del puno P?
RP:4
El punto está conformado por (2,4)
*Pedir a los estudiantes que encuentren las coordenadas de los demás puntos.
*Explicar que sucede con los puntos que están ubicados en los ejes, como son sus coordenadas.

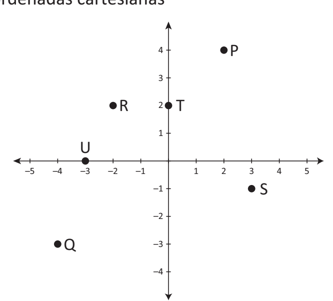


Ejercicio 3.1
(15 min)
Soluciones:
a)



b) A (2, 1) , B (0, 3),
C (2, 5), D (–4, 5),
E (–5, 0), F (–1, –2),
G (0, –3), H (2, –3)

Ejemplo 3.2. Cuál es el par ordenado de los siguientes puntos en el sistema de coordenadas cartesianas



Solución:
P (2, 4) Q (-4, -3) R (-2, 2) S (3, -1) T (0, 2) U (-3, 0)

En el caso del punto T y U están ubicadas sobre los ejes y y x respectivamente, por lo tanto:
Si el punto está ubicado en el eje x la coordenada de y será cero (a, 0)
Si el punto está ubicado en el eje y la coordenada de x será cero (0, a)

[B]

Para determinar la ubicación de un punto P, se traza un segmento vertical desde el punto P hasta el eje x y un segmento horizontal desde el punto P hasta el eje y la intersección de los dos segmentos corresponde al punto P.

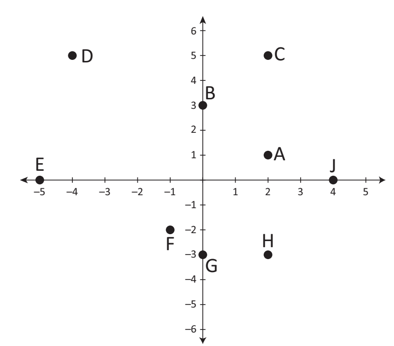
Si estos segmentos cortan a los ejes x y y en los puntos a y b respectivamente entonces el punto P tiene coordenadas (a, b) y se escribe P (a, b).



Ejercicio 3.1.

a) Ubique los siguientes puntos en un sistema de coordenadas cartesianas
A (2, 5) B (–3,1) C (–2, –2) D (4, –3)
E (0, –1) F (5,0) G (–6,0) H (0, –4)

b) En el siguiente sistema de coordenadas cartesianas determine el par ordenado de los puntos que están graficados.



40 | Unidad I • Lección 3 • Clase 1. Coordenadas planas

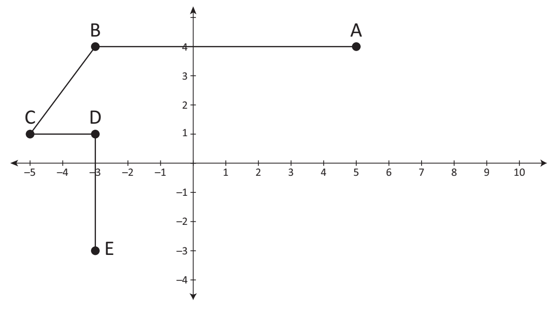
Objetivo: **[A]** Encontrar la distancia entre el punto del origen y otro punto en el plano cartesiano

Evaluación: Ejercicio 3.2

Unidad I. Lección 3.
Clase 1
(Continuación)

Clase 2

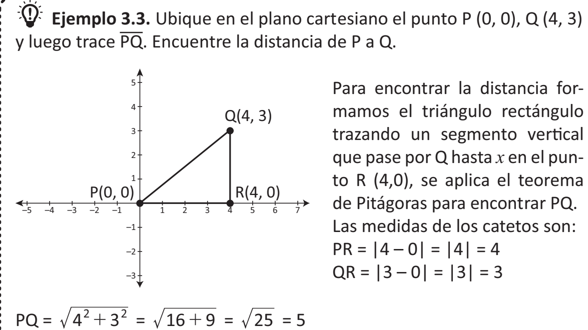
c) El siguiente diagrama muestra el dibujo parcial de una casa



c_1) Nombre las coordenadas de los puntos A, B, C, D, E
c_2) Grafique los puntos F(8, –3) G(8, 1) H(10, 1) I(7, 4) J(6, 4) K(6, 5) L(5, 5)
c_3) Dibuje los segmentos $\overline{EF}$, $\overline{FG}$, $\overline{GH}$, $\overline{HI}$, $\overline{IJ}$, $\overline{JK}$, $\overline{KL}$ y $\overline{LA}$.

Clase 2. Distancia entre dos puntos en el plano cartesiano desde el origen

Ejemplo 3.3. Ubique en el plano cartesiano el punto P (0, 0), Q (4, 3) y luego trace $\overline{PQ}$. Encuentre la distancia de P a Q.



Para encontrar la distancia formamos el triángulo rectángulo trazando un segmento vertical que pase por Q hasta x en el punto R (4,0), se aplica el teorema de Pitágoras para encontrar PQ.
Las medidas de los catetos son:
PR = |4 – 0| = |4| = 4
QR = |3 – 0| = |3| = 3

PQ = $\sqrt{4^2+3^2}$ = $\sqrt{16+9}$ = $\sqrt{25}$ = 5

PQ = 5
La distancia de P a Q es 5 unidades

[A]

Se forma un triángulo rectángulo por lo que el segmento PQ es la hipotenusa del triángulo rectángulo.

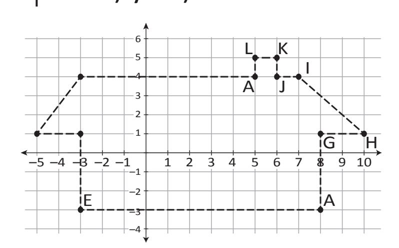
La distancia de PR se obtiene restando las coordenadas en x de cada punto y la distancia de QR se obtienen restando las coordenadas de y de cada punto.
PR $|x_2 - x_1|$
QR $|y_2 - y_1|$

Ejercicio 3.2. Sea P(0, 0) Q(8, 10) R(3, 2) S(1, 4) T(–2, 5) U(–4, –3)
Encuentre la distancia y para cada inciso, ubique los puntos en el plano cartesiano.
a) PQ b) PR c) PS d) PT e) PU

Unidad I • Lección 3 • Clase 2. Distancia entre dos puntos en el plano cartesiano desde el origen | 41

c_1) A (5, 4), B (–2, 4), C (–5, 1), D (–3, 1), E (–3, –3)

c2) y c3)



[Hasta aquí Clase 1]

[Desde aquí Clase 2]

[A]

Ejemplo 3.3
(20 min)
*Pedir a los estudiantes que ubiquen los puntos en el plano cartesiano y que formen la figura uniendo los segmentos PQ y PR
M: ¿Qué figura se forma?
RP: Un triángulo
M: ¿Qué tipo de triángulo?
RP: Rectángulo
M: ¿Cuáles son las coordenadas del punto R?
RP: (3,0)
M: ¿Cuánto miden los segmentos PR y RQ?
RP: 4 y 3
M: ¿Cómo podemos obtener la longitud de PQ?
RP: Mediante teorema de Pitágoras.

*Pedir a los estudiantes que recuerden como se obtiene la distancia entre dos números en la recta numérica ($|x_2 - x_1|$)
Y aplicar teorema de Pitágoras para resolver y encontrar la longitud PQ.

Ejercicio 3.2. (20 min)
Solución en pág. 52

Unidad I. Lección 3.

Clase 3

(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: **[A]** Aplicar la fórmula de la distancia para encontrar la distancia entre dos puntos en el plano cartesiano.

Evaluación: Ejercicio 3.3

Ejemplo 3.4

(15 min)

*En la clase anterior los estudiantes aprendieron a encontrar la distancia entre el origen y otro punto en el plano cartesiano, por lo que en este caso se debe trasladar la misma idea para poder deducir la fórmula de la distancia.

Teorema 3.1

(5 min)

*Pedir a los estudiantes memoricen la formula.

Ejemplo 3.5

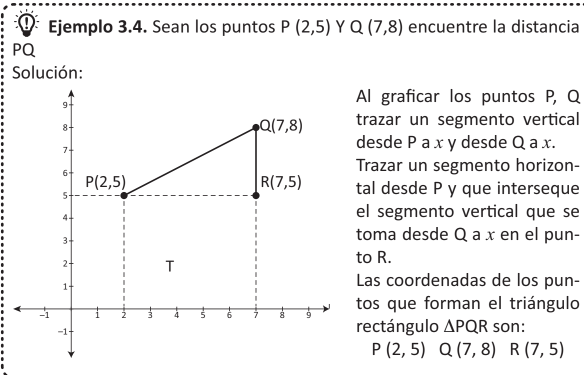
(10 min)

*Concluyen en obtener la distancia entre dos punto usando la formula.

Clase 3. Distancia entre dos puntos en el plano cartesiano

Ejemplo 3.4. Sean los puntos P (2,5) Y Q (7,8) encuentre la distancia PQ

Solución:



Al graficar los puntos P, Q trazar un segmento vertical desde P a x y desde Q a x. Trazar un segmento horizontal desde P y que interseque el segmento vertical que se toma desde Q a x en el punto R.

Las coordenadas de los puntos que forman el triángulo rectángulo ΔPQR son:

P (2, 5) Q (7, 8) R (7, 5)

Las medidas de los segmentos son:

PR = |7 – 2| = |5| = 5 QR = |8 – 5| = |3| = 3

$PQ = \sqrt{PR^2 + QR^2} = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34} \approx 5.8$

R: La distancia PQ es 5.8 unidades

De los ejemplos 3.3 y 3.4 se puede incluir la fórmula para calcular la distancia entre dos puntos en un sistema de ejes coordenados

Teorema 3.1 Fórmula de distancia

Sea P (x_1, y_1) y Q (x_2, y_2). La distancia entre P y Q está dada por:

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



Al tener la fórmula de la distancia entre dos puntos no es necesario graficar los puntos en el plano para calcularla.

Ejemplo 3.5. Encontrar la distancia entre los puntos M y N. M (–2, 3) N (1, 4)

Solución:

M (–2, 3) → x_1, y_1 N (1, 4) → x_2, y_2

$MN = \sqrt{(1-(-2))^2 + (4-3)^2} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10} \approx 3.16$

R: $MN = \sqrt{10}$ ó $MN \approx 3.16$

Clase 3
(Continuación)

Ejercicios de la lección

Ejercicio 3.3.

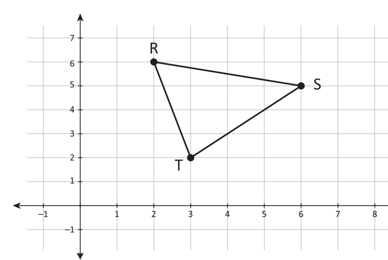
a) Dados los puntos: A (2, 3) B (5, 7) C (0, 2) D (–2, 5) E (4, 13) F (3, –4) G (8, 8) H (0, 7) I (3, 5)

Encuentre la distancia:

a_1) AB a_2) CA a_3) DE a_4) FG a_5) HI

b) Dado el siguiente diagrama encuentre la distancia

b_1) RS b_2) ST b_3) RT



Utilice la fórmula para encontrar la distancia.

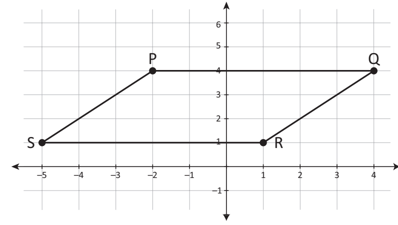
Ejercicios de la lección

1) Grafique los siguientes puntos en el plano cartesiano

A (5, 7) B (3, –7) C (–5, –3) D (–5, 7) E (–5, –7) F (0, 3)

G (1, 0) H (0, 0) I $(\frac{2}{3}, 1)$ J $(-\frac{1}{4}, 3)$ K (5.2, –1.3)

2) Dado el siguiente romboide encuentre las coordenadas de los vértices.



3) Encuentre las dimensiones de los lados del romboide en 2)

4) Encuentre la distancia entre los siguientes pares de puntos.

a) (–2, 5) y (4, 13) b) (3, –4) y (0,1)

c) (3, 0) y (–5, 0) d) (0, 0) y (–3, –5)

e) $(\frac{1}{2}, 2)$ y $(-\frac{3}{4}, \frac{2}{3})$ f) (0.3, –1.5) y (2.5, –4)

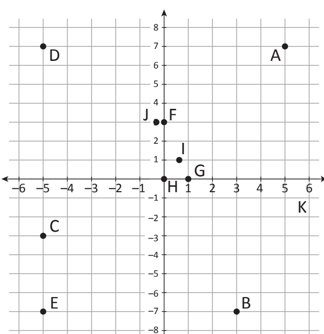
Ejercicio 3.3
(15 min)
Solución en pág. 52

[Hasta aquí Clase 3]

[Desde aquí ejercicios]

Ejercicios de la lección
Soluciones

1.



2. Coordenadas
P(– 2, 4); Q(4, 4);
R(1, 1); S(– 5, 1)

3. PQ = 6; RQ = $3\sqrt{2}$;
SP= $3\sqrt{2}$; RS = 6

4. a) = $\sqrt{(4+2)^2+(13-5)^2}$ = 10 b) = $\sqrt{(0-3)^2+(1+4)^2}$ = $\sqrt{34}$

c) = $\sqrt{(-5-3)^2+(0-0)^2}$ = 8 d) = $\sqrt{(-3-0)^2+(-5-0)^2}$ = $\sqrt{34}$

e) = $\sqrt{\left(\frac{-3}{4}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{2}{3}-2\right)^2}$ = $\sqrt{\frac{481}{12}}$ = 1.83 f) = $\sqrt{(2.5-0.3)^2+(-4+1.5)^2}$ = $\sqrt{11.09}$ = 3.33

Solución Ejercicio 3.2. Pág. 49

a) PQ = $\sqrt{8^2 + 10^2}$ = $\sqrt{64 + 100}$ = $\sqrt{164}$ = 12.81

b) PR = $\sqrt{3^2 + 2^2}$ = $\sqrt{9 + 4}$ = $\sqrt{13}$ = 3.60

c) PS = $\sqrt{1^2 + 4^2}$ = $\sqrt{1 + 16}$ = $\sqrt{17}$ = 4.12

d) PT = $\sqrt{(-2)^2 + 5^2}$ = $\sqrt{4 + 25}$ = $\sqrt{29}$ = 5.38

e) PU = $\sqrt{(-4)^2 + (-3)^2}$ = $\sqrt{16 + 9}$ = $\sqrt{25}$ = 5

Solución Ejercicio 3.3. Pág. 51

a1) AB = $\sqrt{(5-2)^2 + (7-3)^2}$ = 5

a2) CA = $\sqrt{(0-2)^2 + (2-3)^2}$ = 2.2

a3) DE = $\sqrt{(4+2)^2 + (13-5)^2}$ = 10

a4) FG = $\sqrt{(8-3)^2 + (8+4)^2}$ = 13

a5) HI = $\sqrt{(3-0)^3 + (5-7)^2}$ = 3.6

b) R(2, 6), T(3, 2), S(6,5)

b1) RS = $\sqrt{(6-2)^2 + (5-6)^2}$ = 2.23

b2) ST = $\sqrt{(3-6)^2 + (2-5)^2}$ = 4.24

b3) RT = $\sqrt{(3-2)^2 + (2-6)^2}$ = 4.1



Introducción a la trigonometría

1. **Competencias de la Unidad**
   1. Conceptualizar ángulos, sus medidas y posiciones en un sistema de coordenadas rectangulres.
   2. Establecer relaciones y conversiones entre grados y radianes.
   3. Construir ángulos en un sistema de coordenadas rectangulares.
   4. Aplicar los ángulos para resolver situaciones de la vida real.
   5. Aplicar las razones trigonométricas de los ángulos agudos en la resolución de problemas de diferentes áreas del conocimiento.

2. **Relación y Desarrollo**

Noveno grado

Semejanza de triángulos
- Criterio de semejanza de triángulos rectángulos Teorema de Pitágoras

Matemática I

Unidad II
- Lección 1: Funciones trigonométricas del ángulo agudo
- Lección 2: Funciones trigonométricas de cualquier ángulo

Matemática II

Unidad II: Funciones trascendentales
- Lección 3: Resolución de triangulos
- Lección 4: Las gráficas de las funciones trigonométricas

Matemática IV

Unidad I: Trigonometría

Unidad IV: Derivadas de funciones trascendentales

3. Plan de Estudio de la Unidad (15 y *2 horas)

Lección	Clase/hora	Contenidos	Términos y signos
1. Funciones trigonométricas del ángulo agudo (7 horas)	1	Semejanza de los triángulos rectángulos	lado opuesto, lado adyacente
	2	Triángulos rectángulos especiales	
	3	Tangente 1: Definición, uso de la tabla, encontrar la medida del ángulo	tangente, tanθ
	4	Tangente 2: Cálculo de la medida del lado	ángulo de elevación, ángulo de depresión
	5	Seno y coseno 1: Definición, encontrar la medida del ángulo	seno, coseno, senθ, cosθ
	6	Seno y coseno 2: Cálculo de la medida del lado, valor en los ángulos especiales	
	7	Secante, cosecante y cotangente: Definición	secante, cosecante, cotangente, secθ, cscθ, cotθ
		Ejercicios de la lección	
2. Funciones trigonométricas de cualquier ángulo (8 y *2 horas)	1	Ángulos de sentido amplio	lado inicial, lado terminal
	2	Definición de funciones trigonométricas de cualquier ángulo	
	3	Los valores de las funciones trigonométricas	
	4	Valor de la tangente	
	5	Relación entre seno y coseno	
	6	Relación entre coseno y tangente	
	7	Demostración de igualdades utilizando la relación entre senθ y cosθ	
	*8	Relaciones entre las funciones trigonométricas 1	
	*9	Relaciones entre las funciones trigonométricas 2	
	10	Radián	radián
		Ejercicios de la lección	
Problemas de la Unidad		Problemas de la Unidad A	
		Problemas de la Unidad B	

Puntos de lección

Lección 1: Funciones trigonométricas del ángulo agudo

Aunque se definen seis funciones, es decir, seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante, sólo se da la definición de las últimas tres funciones para no complicar el aprendizaje.

El texto da mucha importancia a los ángulos especiales 30º, 45º y 60º para no tener la necesidad de utilizar la calculadora. Para elevar el nivel académico de los estudientes, es recomendable no utilizarla.

Lección 2: Funciones trigonométricas de cualquier ángulo

Primero se extiende el concepto de ángulos de modo que cualquier número real corresponde a un ángulo.
Este texto explica la unidad de medida "radián" en la última clase y no se utiliza en otras partes por las razones siguientes:

a) Esta unidad de medida tiene su utilidad sólo en el área de cálculo infinitesimal que se enseña en Matemática IV.
b) El uso de radián complifica el aprendizaje de la parte elemental de la trigonometría.

Ejemplo: Para dibujar la gráfica $y = \text{sen}(\theta - \frac{\pi}{3})$, hay que calcular fracciones que son más difíciles que los números enteros.

Se recomienda a los docentes que no utilicen mucho tiempo en la conversión entre estas dos unidades de medida del ángulo.

La definición de funciones trigonométricas para cualquier ángulo se basa en la observación de que los valores de coseno y seno corresponden a las coordenadas x e y del punto en la circunferencia con el centro en el origen y radio uno cuando el ángulo theta satisface.

Las relaciones de las clases 8 y 9 son comprensibles cuando se toma en cuenta la relación de simetría entre los lados terminales.

Aunque no está indicado en el currículo, es preferible enseñar la ley de coseno en esta unidad, porque se utiliza en la demostración de la expresión del producto interno de vectores con los componentes.

Unidad II. Lección 1.

Clase 1

(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: **[A]** Entender que las razones de los lados de los triángulos rectángulos son funciones del ángulo agudo.
[B] Memorizar la denominación de los lados.

Evaluación: [A] Ejercicio 1.1.
[B] Ejercicio 1.2.

[A] (13min)

El criterio de semejanza en este caso es AA.

No hay que utilizar mucho tiempo en el repaso del concepto general de semejanza. Basta que los alumnos entienden la relación de las razones.



Ejercicio 1.1.

Solución

a) $\frac{ST}{US}$ b) $\frac{UT}{ST}$ c) $\frac{UT}{US}$

[B] (7 min.)



¡Hay que memorizar esta denominación!



Ejercicio 1.2.

(10min)

Solución

a) $\frac{op}{hip}$ b) $\frac{ady}{hip}$

c) $\frac{ady}{op}$ d) $\frac{hip}{op}$

e) $\frac{hip}{ady}$

Lección 1. Funciones trigonométricas del ángulo agudo

Clase 1. Semejanza de los triángulos rectángulos

Dos triángulos rectángulos son semejantes cuando uno de los dos ángulos agudos son iguales.

En la Fig. 1.1, $\Delta ABC \sim \Delta AB'C'$, por lo tanto la razón de dos lados tiene el mismo valor en ambos triángulos. Como cada triángulo tiene tres lados, existen seis razones:

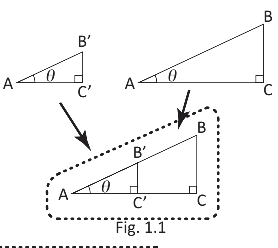


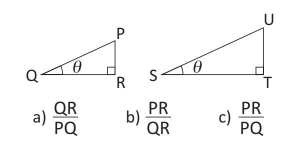
Fig. 1.1

$$\frac{BC}{AC}=\frac{B'C'}{AC'},\quad \frac{BC}{AB}=\frac{B'C'}{AB'},\quad \frac{AC}{AB}=\frac{AC'}{AB'}$$

$$\frac{AC}{BC}=\frac{AC'}{B'C'},\quad \frac{AB}{BC}=\frac{AB'}{B'C'},\quad \frac{AB}{AC}=\frac{AB'}{AC'}$$

Estos valores se determinan por el valor de θ y no dependen del tamaño del triángulo, por lo tanto se pueden considerar como funciones de θ. Son estas funciones que se estudiarán en esta unidad.

Ejercicio 1.1. En los dos triángulos rectángulos, los ángulos son iguales. ¿Cuál es la razón de los lados del ΔSTU que es igual a la razón dada de dos lados del ΔQRP?



a) $\frac{QR}{PQ}$ b) $\frac{PR}{QR}$ c) $\frac{PR}{PQ}$

Para facilitar la indicación de estos valores, es conveniente denominar los lados con respecto al ángulo agudo indicado.

Ejemplo 1.1. La razón $\frac{BC}{AC}$ de la Fig. 1.2 se representa como $\frac{\text{lado opuesto } \theta}{\text{lado adyacente } \theta}$, en forma breve $\frac{BC}{AC}=\frac{op}{ady}$.

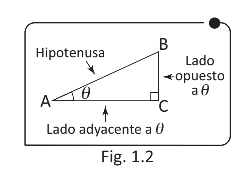
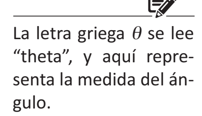


Fig. 1.2

Ejercicio 1.2. Exprese las siguientes razones en la Fig.1.1 en la forma breve como en el Ejemplo 1.1.

a) $\frac{BC}{AB}$ b) $\frac{AC}{AB}$ c) $\frac{AC}{BC}$ d) $\frac{AB}{BC}$ e) $\frac{AB}{AC}$

[A] Véase Unidad 1 - Clase 1



La letra griega θ se lee "theta", y aquí representa la medida del ángulo.

¿Por qué seis?
3 x 2 x 1 = 6

AC representa la longitud del segmento $\overline{AC}$.

[B]

46 | Unidad II • Lección 1 • Clase 1. Semejanza de los triángulos rectángulos

---

Objetivo: Memorizar las razones de los tres lados de los triángulos rectángulos especiales.

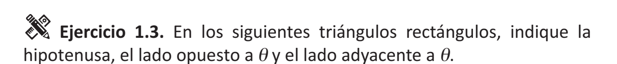
Evaluación: Ejercicio 1.4.

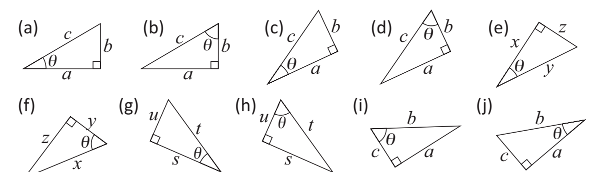
Unidad II. Lección 1.

Clase 1
(Continuación)

Clase 2
(Continúa en la siguiente página)

Ejercicio 1.3. En los siguientes triángulos rectángulos, indique la hipotenusa, el lado opuesto a θ y el lado adyacente a θ.

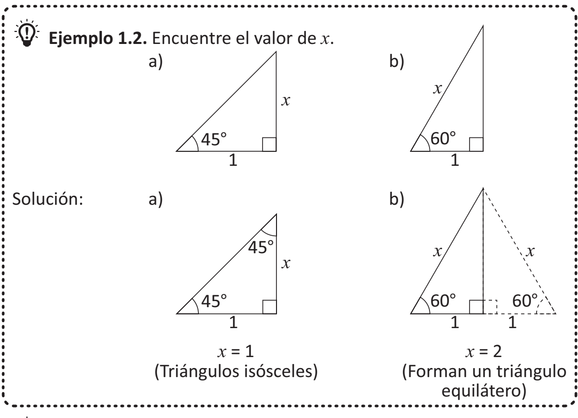


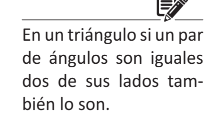


Clase 2. Triángulos rectángulos especiales

Hay dos triángulos especiales cuyas razones de los lados se sabe fácilmente.

Ejemplo 1.2. Encuentre el valor de x.



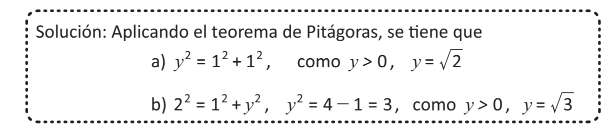


¿Cuál es la medida del ángulo restante?

En un triángulo si un par de ángulos son iguales dos de sus lados también lo son.

Reflejando el triángulo se obtiene un triángulo equilátero de base 2.

Ejemplo 1.3. Encuentre el valor de y.

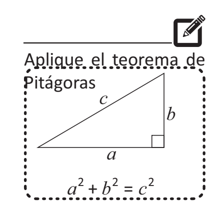


Solución: Aplicando el teorema de Pitágoras, se tiene que

a) $y^2 = 1^2 + 1^2$, como $y > 0$, $y = \sqrt{2}$

b) $2^2 = 1^2 + y^2$, $y^2 = 4 - 1 = 3$, como $y > 0$, $y = \sqrt{3}$

Aplique el teorema de Pitágoras



Unidad II • Lección 1 • Clase 2. Triángulos rectángulos especiales | 47

Ejercicio 1.3.
(10min) Solución

	hip	op	ad
a)	c	b	a
b)	c	a	b
c)	c	b	a
d)	c	a	b
e)	y	z	x
f)	x	z	y
g)	t	u	s
h)	t	s	u
i)	b	a	c
J)	b	c	a

Resumen (5min)

[Hasta aquí Clase 1]

[Desde aquí Clase 2]



Ejemplo 1.2
(7min)

Ejemplo 1.3
(10min)

No hay que repasar el teorema de Pitágoras detalladamente.

Clase 2
(Continuación)

(5min)



Es esencial memorizar estas medidas.

Ejemplo 1.4.
(10min)
Mostrar claramente la correspondencia de los lados.

Ejercicio 1.4.
(10min)
Solución

a) $x = 1, y = 1$

b) $x = 1, y = \sqrt{3}$

c) $x = 1, y = 1$

d) $x = 1, y = \sqrt{3}$

e) $x = \frac{1}{\sqrt{2}}, y = \frac{1}{\sqrt{2}}$

f) $x = \frac{\sqrt{3}}{2}, y = \frac{1}{2}$

g) $x = \frac{1}{\sqrt{2}}, y = \frac{1}{\sqrt{2}}$

h) $x = \frac{\sqrt{3}}{2}, y = \frac{1}{2}$

En resumen

Triángulos: $\sqrt{2}$, 45°, 1, 45°, 1 — 2, 30°, $\sqrt{3}$, 60°, 1

Fig. 1.3

Estos valores se utilizarán frecuentemente.

Ejemplo 1.4. Encuentre los valores de x e y.

a) 1, 45°, y, 45°, x b) 1, 30°, y, 60°, x

Solución: a)

$\sqrt{2}$, 45°, 1, 45°, 1 $\xrightarrow{\div\sqrt{2}}$ 1, 45°, y, 45°, x

$x = 1 \div \sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$y = 1 \div \sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

No es necesario racionalizar el denominador si no está indicado.

b)

2, 30°, $\sqrt{3}$, 60°, 1 $\xrightarrow{\div 2}$ 1, 30°, y, 60°, x

$x = 1 \div 2 = \frac{1}{2}$

$y = \sqrt{3} \div 2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(1) 1, 45°, $\frac{1}{\sqrt{2}}$, 45°, $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (2) 1, 30°, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 60°, $\frac{1}{2}$

Fig. 1.4

Ejercicio 1.4. Encuentre los valores de x e y.

a) y, x, 45°, $\sqrt{2}$ b) y, 30°, 2, x, 60° c) x, $\sqrt{2}$, 45°, y d) 2, 60°, 30°, x, y

e) 45°, 1, x, y f) 1, y, 30°, x g) x, y, 45°, 1 h) y, 60°, x, 1

48 | Unidad II • Lección 1 • Clase 2. Triángulos rectángulos especiales

Resumen (3min) Que los alumnos escriban las razones de los lados de los dos tipos de triángulo rectángulo.

Objetivo: **[A]** Memorizar la definición de tangente.
[B] Usar la tabla para encontrar el valor de la tangente.
[C] Encontrar la medida del ángulo de un triángulo rectángulo usando el valor de tangente.

Unidad II. Lección 1.
Clase 3
(Continúa en la siguiente página)

Evaluación: [A] Ejercicio1.5 a) a d) [B] Ejercicio1.6 [C] Ejercicio1.7

Clase 3. Tangente 1

[A] Definición de la tangente

$\tan\theta = \frac{op}{ady}$

Fig. 1.5

El valor $\frac{op}{ady}$ depende sólo de θ y no del tamaño del triángulo. (Clase 1).

Ejemplo 1.5. Encuentre el valor de $\tan\theta$.

a) b)

En b) 1 ady, 3 op

Solución: a) $\tan\theta = \frac{3}{4}$ b) $\tan\theta = \frac{3}{1} = 3$

Ejercicio 1.5. Encuentre el valor de $\tan\theta$.

a) b) c) d) e)

En e) utilice el teorema de Pitágoras

[B] Tabla de funciones trigonométricas

Los valores de $\tan\theta$ están calculados. Al final del texto se presentan algunos de ellos.

Por ejemplo
$\tan 35° \approx 0.7002$
Esto es un valor aproximado.

θ	$\tan\theta$
35°	0.7002

La manera del cálculo del valor de $\tan\theta$ pertenece al estudio de una rama de la matemática llamada "cálculo".
No hay que memorizar esta tabla.

El signo ≈ significa casi igual.

Ejercicio 1.6. Busque los siguientes valores en la tabla.

a) tan10° b) tan40° c) tan70° d) tan85°

Unidad II • Lección 1 • Clase 3. Tangente 1 | 49

[A] Definición (5min)
Tangente es una de las seis razones de la Clase 1.



Es esencial memorizar la definición.

Ejemplo 1.5. (5min)
Primero identificar el opuesto y el adyacente con respecto al ángulo θ.



Ejercicio 1.5 (8min) Solución

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{2}{3}$

c) 3 d) $\frac{2}{5}$

e) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (op = $\sqrt{5}$)

[B] (5min)
También se puede utilizar la calculadora científica.

Ejercicio 1.6. (5min)
Solución
a) 0.1763
b) 0.8391
c) 2.7475
d) 11.4301

Unidad II. Lección 1.

Clase 3
(Continuación)

Clase 4
(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: Encontrar la medida de los lados de un triángulo rectángulo utilizando tangente.

Evaluación: Ejercicio 1.8 a) y b)
Ejercicio 1.9

[C] Ejemplo 1.6
(7 min) Se acepta la respuesta $\theta \approx 36°$

Ejercicio 1.7
(10 min) Solución
a) $\theta \approx 27°$
b) $\theta \approx 34°$
c) $\theta \approx 72°$
d) $\theta \approx 22°$

[Hasta aquí Clase 3]

[Desde aquí Clase 4]

Repaso (5min)
Definición de tangente.
(Clase 3)

Ejemplo 1.7
(12 min) Multiplicando por 10 en ambos lados de la primera igualdad, se obtiene la segunda.

Ejercicio 1.8
(10 min) Solución

a) x = 20tan35°
≈ 20 x 0.7002
= 14.004

b) x = 30tan70°
≈ 30 x 2.7475
= 82.425

c) x = 10tan(90° – 65°)
= 10tan25°
≈ 4.663

d) x = 5tan(90° – 25°)
= 5tan65°
≈ 10.7225

[C] Encontrar la medida del ángulo

36° < θ < 37° y θ está más cerca de 37°.

Ejemplo 1.6. En el Ejemplo 1.5 a), encuentre el valor de θ utilizando la tabla.
Solución: $\tan\theta = \frac{3}{4} = 0.75$
En la tabla aparece tan36° ≈ 0.7265 y tan37° ≈ 0.7536.
Por lo tanto $\theta \approx 37°$

Ejercicio 1.7. Encuentre el valor aproximado de θ de a) a d) del Ejercicio 1.5. Utilice la tabla.

Clase 4. Tangente 2

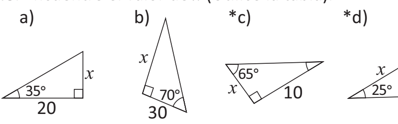
Ejemplo 1.7. Encuentre el valor de x. Utilice la tabla o calculadora científica.

(triángulo: 40°, 10, x)

Solución: $\frac{x}{10}$ = tan40°
x = 10 tan40° Despejando x
≈ 10 x 0.8391 Consultando la tabla
= 8.391 Respuesta

Es recomendable poner el número 10 antes de tan40°, para no confundir 10xtan40° con tan(40°x10) = tan400°.

Ejercicio 1.8. Encuentre el valor de x (Utilice la tabla).



Ejemplo 1.8. La Fig.1.6 muestra que una persona mira a la cima de un árbol. Si θ = 25°, encuentre la altura del árbol (hasta las décimas) en metros.

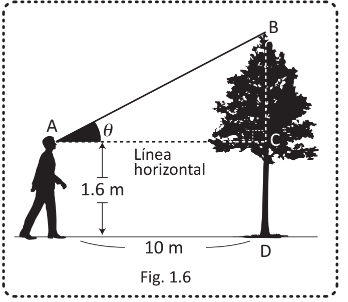


Fig. 1.6

Al ángulo θ se le llama **ángulo de elevación.**

Ejemplo 1.8 (10 min) Observe el triángulo ABC.

Objetivo: **[A]** Memorizar la definición de seno y coseno.
[B] Encontrar la medida del ángulo de un triángulo rectángulo utilizando seno o coseno.

Evaluación: Ejercicio1.11.
Ejercicio1.13.

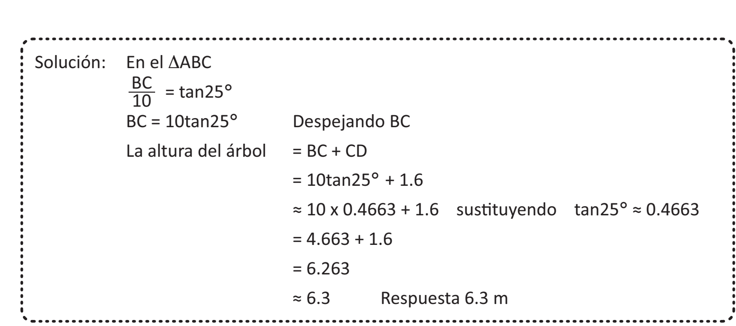
Unidad II. Lección 1.

Clase 4

(Continuación)

Clase 5

(Continúa en la siguiente página)



Solución: En el ΔABC

$\frac{BC}{10} = \tan 25°$

BC = 10tan25° Despejando BC

La altura del árbol = BC + CD

= 10tan25° + 1.6

≈ 10 x 0.4663 + 1.6 sustituyendo tan25° ≈ 0.4663

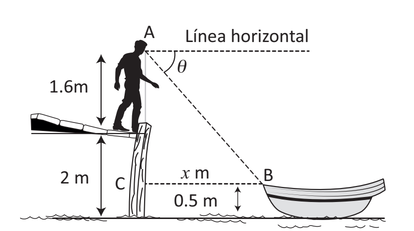
= 4.663 + 1.6

= 6.263

≈ 6.3 Respuesta 6.3 m

Ejercicio 1.9. Si en la Fig.1.6; θ = 32°, ¿cuál es la altura del árbol?

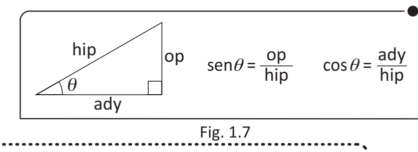
Ejercicio 1.10. En la figura una persona mira la proa de un barco. Si θ = 20°, encuentre la distancia entre la proa y el muelle (hasta las décimas).



Al ángulo θ se le llama **ángulo de depresión**.

Clase 5. Seno y coseno

Definición de seno y coseno



$\text{sen}\theta = \frac{op}{hip}$ $\cos\theta = \frac{ady}{hip}$

Fig. 1.7

[A] 

seno, coseno y tangente son las razones trigonométricas más importantes.

sen y cos son abreviación de seno y coseno.

Primero identifique la hipotenusa, el lado opuesto a θ y el lado adyacente a θ.

Ejemplo 1.9. Encuentre el seno y el coseno de θ.

a) (triángulo con lados 5, 3, 4) b) (triángulo con lados 2, $\sqrt{13}$, 3)

Solución: a) $\text{sen}\theta = \frac{3}{5}$ b) $\text{sen}\theta = \frac{2}{\sqrt{13}}$

$\cos\theta = \frac{4}{5}$ $\cos\theta = \frac{3}{\sqrt{13}}$

Unidad II • Lección 1 • Clase 5. Seno y coseno 1 | 51

Ejercicio 1.9
(10 min) Solución
BC = 10tan32º

La altura
= BC + CD
= 10tan32º + 1.6
≈ 6.249 + 1.6
= 7.849
≈ 7.8
Respuesta 7.8m

Ejercicio 1.10
(8 min) También observe el triángulo ABC.
Solución
AC = 1.6 + 2 – 0.5 = 3.1 (m)
m∠BAC = 90º – 20º = 70º
x = 3.1tan70º
≈ 8.51725
Respuesta 8.5 m

[Hasta aquí Clase 4]

[Desde aquí Clase 5]

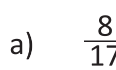
Repaso (4min)

[A]
(4 min)
Siempre hay que memorizar la definición.

Ejemplo 1.9
(4 min)

Clase 5
(Continuación)

Ejercicio1.11.
(5 min)
Siempre hay que indicar primero op y ady.
Solución



	sen	cos
a)	$\frac{8}{17}$	$\frac{15}{17}$
b)	$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$	$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$
c)	$\frac{5}{13}$	$\frac{12}{13}$
d)	$\frac{5}{\sqrt{41}}$	$\frac{4}{\sqrt{41}}$

Ejemplo1.10
(6 min)

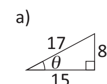


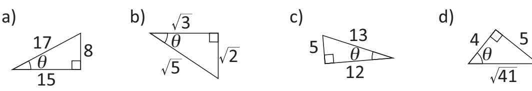
Ejercicio1.12
(8 min) Solución x

	x	sen	cos	tan
a)	$\sqrt{29}$	$\frac{5}{\sqrt{29}}$	$\frac{2}{\sqrt{29}}$	$\frac{5}{2}$
b)	$\sqrt{6}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$
c)	$\sqrt{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{\sqrt{5}}{3}$	$\frac{2}{\sqrt{5}}$
d)	$\sqrt{7}$	$\frac{\sqrt{7}}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{\sqrt{7}}{3}$

[B] Ejemplo1.11
(7 min)
El proceso es similar al del Ejemplo 1.6

Ejercicio 1.11. Encuentre seno y coseno de θ.





***Ejemplo 1.10.** a) Encuentre la medida de la hipotenusa.
b) Encuentre los valores de senθ, cosθ, tanθ.

(Triángulo: catetos 2 y 3, ángulo θ)

Solución: Sea x la medida de la hipotenusa.

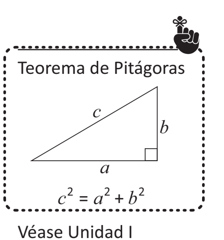
$x^2 = 3^2 + 2^2$ Teorema de Pitágoras

$x^2 = 13$ $x > 0$

$x = \sqrt{13}$

b) sen$\theta = \frac{2}{\sqrt{13}}$, cos$\theta = \frac{3}{\sqrt{13}}$, tan$\theta = \frac{2}{3}$

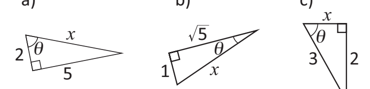
Teorema de Pitágoras

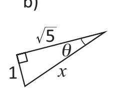


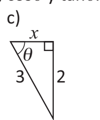
$c^2 = a^2 + b^2$

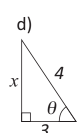
Véase Unidad I

***Ejercicio 1.12.** Encuentre el valor de x, senθ, cosθ y tanθ.









Encontrar la medida del ángulo θ

[B]

Ejemplo 1.11. Encuentre el valor de θ en el Ejemplo 1.9 a).
Utilice la tabla.

Solución 1: sen$\theta = \frac{3}{5} = 0.6$
sen36° ≈ 0.5878 y sen37° ≈ 0.6018 Tabla
θ ≈ 37° Respuesta

Solución 2: cos$\theta = \frac{4}{5} = 0.8$
cos36° ≈ 0.8090 y cos37° ≈ 0.7986 Tabla
θ ≈ 37° Respuesta

0.6 queda más cerca de 0.6018 que de 0.5878. También se puede utilizar tanθ.
(Véase Ejemplo 1.6)

Ejercicio 1.13. Encuentre el valor de θ en el Ejercicio 1.11 a) y c).

52 | Unidad II • Lección 1 • Clase 5. Seno y coseno 1

Ejercicio1.13. (7min) Solución

a) sen$\theta = \frac{8}{17} = 0.4705...$ $\theta \approx 28°$ ó cos$\theta = \frac{15}{17} = 0.8823...$

c) sen$\theta = \frac{5}{13} = 0.3846...$ $\theta \approx 23°$ ó cos$\theta = \frac{12}{13} = 0.9230...$

Objetivo: **[A]** Encontrar la medida de los lados de un triángulo rectángulo utilizando seno o coseno.
[B] Deducir los valores de sen, cos y tan en los ángulos especiales.

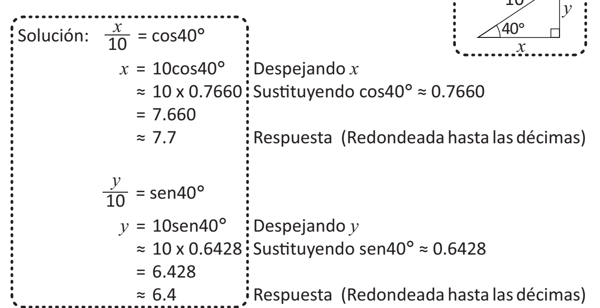
Evaluación: [A] Ejercicio1.14, [B] Ejercicio1.16 a) a c).

Unidad II. Lección 1.
Clase 6
(Continúa en la siguiente página)

Clase 6. Seno y coseno 2

Encontrar la medida del lado

Ejemplo 1.12. Encuentre los valores de x e y hasta las décimas. Utilice la tabla al final del texto.



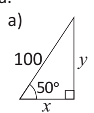
Solución: $\frac{x}{10} = \cos 40°$

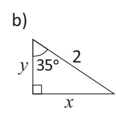
$x = 10\cos 40°$ Despejando x
$\approx 10 \times 0.7660$ Sustituyendo $\cos 40° \approx 0.7660$
$= 7.660$
≈ 7.7 Respuesta (Redondeada hasta las décimas)

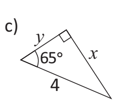
$\frac{y}{10} = \text{sen}40°$

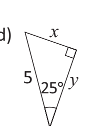
$y = 10\text{sen}40°$ Despejando y
$\approx 10 \times 0.6428$ Sustituyendo $\text{sen}40° \approx 0.6428$
$= 6.428$
≈ 6.4 Respuesta (Redondeada hasta las décimas)

Ejercicio 1.14. Encuentre los valores de x e y hasta las décimas. Utilice la tabla.

a) 

b) 

c) 

d) 

***Ejemplo 1.13.** Encuentre el valor de x hasta las décimas. Utilice la tabla.

x 10 25°

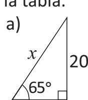
Solución: $\text{sen}25° = \frac{10}{x}$

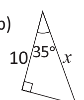
$x = \frac{10}{\text{sen}25°}$ Despejando x

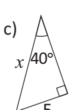
$\approx \frac{10}{0.4226}$ Sustituyendo $\text{sen}25° \approx 0.4226$

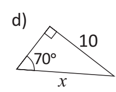
≈ 23.66
≈ 23.7 Respuesta (Redondeada hasta las décimas)

***Ejercicio 1.15.** Encuentre el valor de x hasta las décimas. Utilice la tabla.

a) 

b) 

c) 

d) 

[A]

En lugar de la tabla al final del texto, se puede utilizar la calculadora científica.

El proceso es similar al caso de la tangente (Ejemplo 1.7)

Si $a = \frac{b}{x}$, entonces $x = \frac{b}{a}$

Unidad II • Lección 1 • Clase 6. Seno y coseno 2 | 53

Ejercicio1.15. (7 min) Solución

a) $x = \frac{20}{\text{sen}65º} \approx 22.1$ b) $x = \frac{10}{\cos 35º} \approx 12.2$

c) $x = \frac{5}{\text{sen}40º} \approx 7.8$ d) $x = \frac{10}{\text{sen}70º} \approx 10.6$

[A]Repaso (2min)

Ejemplo1.12
(7 min)

En cuanto a la notación se aplica la misma nota del Ejemplo 1.7, es decir, se escribe 10 antes de sen y cos.

Ejercicio1.14
(7 min) Solución

a) $x = 100\cos 50º$
$\approx 64.28 \approx 64.3$
$y = 100\text{sen}50º$
$\approx 76.60 \approx 76.6$

b) $x = 2\text{sen}35º$
$\approx 1.147 \approx 1.1$
$y = 2\cos 35º$
$\approx 1.6384 \approx 1.6$

c) $x = 4\text{sen}65º$
$\approx 3.6252 \approx 3.6$
$y = 4\cos 65º$
$\approx 1.6904 \approx 1.7$

d) $x = 5\text{sen}25º$
$\approx 2.113 \approx 2.1$
$y = 5\cos 25º$
$\approx 4.5315 \approx 4.5$

Ejemplo1.13
(5 min). Si los alumnos no manejan bien la trasformación $a = \frac{b}{x} \Rightarrow x = \frac{b}{a}$, calcule como $\text{sen}25º = \frac{10}{x}$, $x\,\text{sen}25º = 10$, $x = \frac{10}{\text{sen}25º}$.

Clase 6
(Continuación)

Evaluación: Ejercicio 1.16

[B] Tab.1.1 (7 min)

Los alumnos dibujan en su cuaderno la Fig. 1.3 y encuentran los valores.

Ejemplo 1.14
(5 min)


Ejercicio1.16
(5 min) Solución

a) $x = 6\cos 45º = 3\sqrt{2}$

$y = 6\text{sen}45º = 3\sqrt{2}$

Aquí es mejor racionalizar, porque se puede simplificar.

b) $x = 5\text{sen}60º = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}$

$y = 5\cos 60º = \dfrac{5}{2}$

c) $x = \dfrac{5}{\text{sen}30º} = 10$

$y = 5\tan 60º = 5\sqrt{3}$

d) $x = 3\tan 30º = \sqrt{3}$

$y = \dfrac{3}{\text{sen}60º} = 2\sqrt{3}$

e) $x = 3\tan 60º = 3\sqrt{3}$

$y = \dfrac{3}{\cos 60º} \cdot \text{sen}45º$

$= 3\sqrt{2}$

[B] Ángulos especiales
Utilizando la Fig. 1.3 se tienen los valores especiales de las razones trigonométricas en los ángulos especiales.

De ahora en adelante cuando se tratan seno, coseno y tangente en estos ángulos, se utilizan estos valores exactos en vez de valores aproximados de la tabla al final del texto.

	30°	45°	60°
$\text{sen}\,\theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
$\tan\theta$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

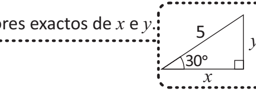
Tab. 1.1



Lo que hay que memorizar es la Fig.1.3 de la clase 2, de la cual se induce la Tab.1.1.

El uso de los valores de la tabla 1.1 es una ¡convención importante en este texto!

Ejemplo 1.14. Encuentre los valores exactos de x e y.



Solución:

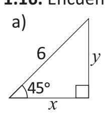
$\frac{x}{5} = \cos 30°$

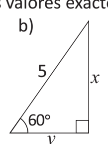
$x = 5\cos 30° = 5\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ (Respuesta)

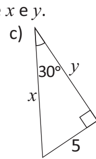
$\frac{y}{5} = \text{sen}30°$

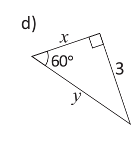
$y = 5\text{sen}30° = 5\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}$ (Respuesta)

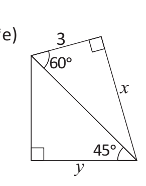
Ejercicio 1.16. Encuentre los valores exactos de x e y.

a)


b)


c)


d)


*e)


Objetivo: Memorizar la definición de secante, cosecante y cotangente

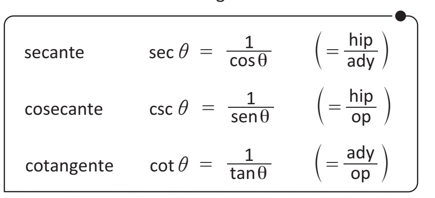
Evaluación: Ejercicio 1.17 a) a c).
Ejercicio 1.18.

Unidad II. Lección 1.
Clase 7

Ejercicios de la lección
(Continúa en la siguiente página)

Clase 7. Secante, cosecante y cotangente

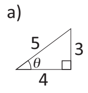
Se definen tres razones más como lo siguiente.

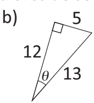


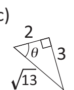
secante	$\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$	$\left(= \dfrac{\text{hip}}{\text{ady}}\right)$
cosecante	$\csc\theta = \dfrac{1}{\text{sen}\,\theta}$	$\left(= \dfrac{\text{hip}}{\text{op}}\right)$
cotangente	$\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$	$\left(= \dfrac{\text{ady}}{\text{op}}\right)$

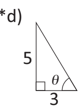
En este texto no se utilizan mucho estas funciones. Sólo memorice la definición.

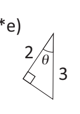
Ejercicio 1.17. Encuentre los valores de secθ, cscθ y cotθ.

a) 

b) 

c) 

*d) 

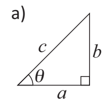
*e) 

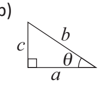
Ejercicio 1.18. Complete la siguiente tabla.

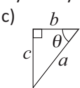
θ	30°	45°	60°
sec θ			
csc θ			
cot θ			

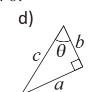
Ejercicios de la lección

1. Indique la hipotenusa, el lado opuesto a θ y el adyacente a θ. Véase Clase 1 [B]

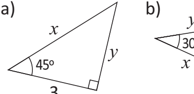
a) 

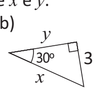
b) 

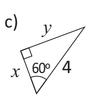
c) 

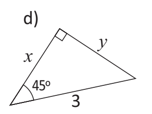
d) 

2. Encuentre los valores de x e y. Véase Clase 2

a) 

b) 

c) 

d) 

Unidad II • Lección 1 • Clase 7. Secante, cosecante y cotangente | 55

Repaso (5 min)
Definición de seno, coseno y tangente.

Definición (8 min)
Estas razones son las que quedaban en la Clase 1 [A] y son inversas de cosθ, senθ y tanθ.

Ejercicio 1.17
(10 min) Solución

	sec	csc	cot
a)	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{4}{3}$
b)	$\frac{13}{12}$	$\frac{13}{5}$	$\frac{12}{5}$
c)	$\frac{\sqrt{13}}{2}$	$\frac{\sqrt{13}}{3}$	$\frac{2}{3}$
d)	$\frac{\sqrt{34}}{3}$	$\frac{\sqrt{34}}{5}$	$\frac{3}{5}$
e)	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{\sqrt{5}}$	$\frac{2}{\sqrt{5}}$

Ejercicio 1.18
(10 min) Dibujar la Fig.1.3
Solución

	30°	45°	60°
sec	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2
csc	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$
cot	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

Resumen (12 min)

[Hasta aquí Clase 7]

[Desde aquí Ejercicios de la Lección]

Ejercicio 1. Solución

	hip	op	ady
a)	c	b	a
b)	b	c	a
c)	a	c	b
d)	c	a	b

Ejercicio 2. Solución

	x	y		x	y
a)	$3\sqrt{2}$	3	b)	6	$3\sqrt{3}$
c)	2	$2\sqrt{3}$	d)	$\frac{3}{\sqrt{2}}$	$\frac{3}{\sqrt{2}}$

Ejercicios de la lección
(Continuación)

Ejercicio 3. Solución

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	Q	R
Coord. x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Coord. y	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$

Ejercicio 4. Solución

	sen	cos	tan
a)	$\frac{2}{\sqrt{13}}$	$\frac{3}{\sqrt{13}}$	$\frac{2}{3}$
b)	$\frac{7}{8}$	$\frac{\sqrt{15}}{8}$	$\frac{7}{\sqrt{15}}$
c)	$\frac{5}{\sqrt{41}}$	$\frac{4}{\sqrt{41}}$	$\frac{5}{4}$
d)	$\frac{5}{7}$	$\frac{2\sqrt{6}}{7}$	$\frac{5}{2\sqrt{6}}$

Ejercicio 5. Solución

a) $\tan\theta = 0.\dot{6}$ $\quad \theta \approx 34°$

b) $\text{sen}\,\theta = 0.875$ $\quad \theta \approx 61°$

c) $\tan\theta = 1.25$ $\quad \theta \approx 51°$

d) $\text{sen}\,\theta = 0.7142...$ $\quad \theta \approx 46°$

Ejercicio 6. Solución

a) $x = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$y = \frac{1}{\text{sen}60°} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

b) $x = 4\cos 45° = 2\sqrt{2}$

$y = 4\,\text{sen}45° = 2\sqrt{2}$

c) $x = 10\,\text{sen}60° \frac{1}{\cos 45°}$

$= 5\sqrt{6}$

$y = 10\cos 60° + 5\sqrt{6}\,\text{sen}45°$

$= 5 + 5\sqrt{3}$

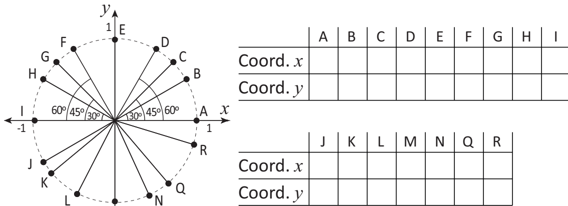
d) $x = 4\,\text{sen}30° \frac{1}{\cos 45°}$

$= 2\sqrt{2}$

$y = 4\cos 30° + 2\sqrt{2}\,\text{sen}45°$

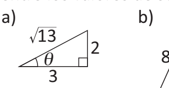
$= 2\sqrt{3} + 2$

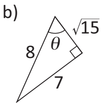
3. Encuentren las coordenadas de los puntos A a R y llene la tabla. Véase Clase 2

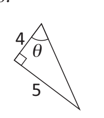


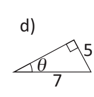
Trace perpendiculares desde los puntos B, C, ... hacia el eje x para formar triángulos rectángulos.

4. Encuentre los valores de senθ, cosθ y tanθ. Véase Clase 3 Fig.1.5 Clase 5 Fig.1.7

a) 

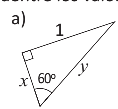
b) 

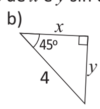
c) 

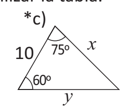
d) 

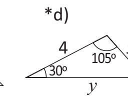
5. Encuentre el valor de θ en el ejercicio 4. Utilice la tabla. Véase Clase 3 Ejemplo 1.5 Clase 5 Ejemplo 1.11

6. Encuentre los valores de x e y sin utilizar la tabla. Véase Clase 2 Fig.1.3 Clase 6 Ejemplo 1.14

a) 

b) 

*c) 

*d) 

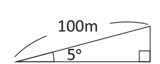
7. En el Ejercicio 4, encuentre los valores de secθ, cscθ y cotθ. Véase Clase 7

8. Un carro corrió 100 m en una cuesta que forma el ángulo de 5° con el plano horizontal. Encuentre los siguientes valores hasta las décimas. Véase Clase 6 Ejemplo 1.12

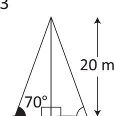
a) La distancia en metros que corrió hacia la dirección horizontal.

b) La subida vertical en metros.

Utilice la tabla.

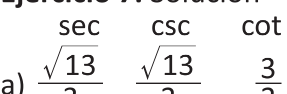


9. Un poste de 20 m está sostenido por alambres. Si cada alambre forma un ángulo de 70° con la tierra horizontal, ¿cuántos metros mide cada alambre? Encuentre el valor hasta las décimas. Utilice la tabla. Véase Clase 6 Ejemplo 1.13



56 | Unidad II • Lección 1 • Ejercicios

Ejercicio 7. Solución



	sec	csc	cot
a)	$\frac{\sqrt{13}}{3}$	$\frac{\sqrt{13}}{2}$	$\frac{3}{2}$
b)	$\frac{8}{\sqrt{15}}$	$\frac{8}{7}$	$\frac{\sqrt{15}}{7}$
c)	$\frac{\sqrt{41}}{4}$	$\frac{\sqrt{41}}{5}$	$\frac{4}{5}$
c)	$\frac{7}{2\sqrt{6}}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{2\sqrt{6}}{5}$

Ejercicio 8. Solución

a) $100\cos 5° \approx 99.6$ (m)

b) $100\,\text{sen}5° \approx 8.7$ (m)

Ejercicio 9. Solución

$\frac{20}{\text{sen}70°} \approx 21.3$ (m)

Objetivo: Entender la definición de los ángulos de sentido amplio.
Memorizar la denominación de los cuadrantes.

Unidad II. Lección 2.
Clase 1
(Continúa en la siguiente página)

Evaluación: Ejercicio 2.1, 2.2 y 2.3.

Lección 2. Funciones trigonométricas de cualquier ángulo

Clase 1. Ángulos de sentido amplio

Sea $\overrightarrow{OX}$ y $\overrightarrow{OP}$ dos rayos con el mismo origen O. $\overrightarrow{OX}$ está fijo y se llama **lado inicial**, mientras que $\overrightarrow{OP}$ gira alrededor del punto O y se llama **lado terminal**. Se define la dirección positiva en sentido antihorario. De esta manera a cualquier ángulo a° (a es un número real) corresponde un único lado terminal $\overrightarrow{OP}$.

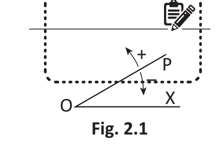
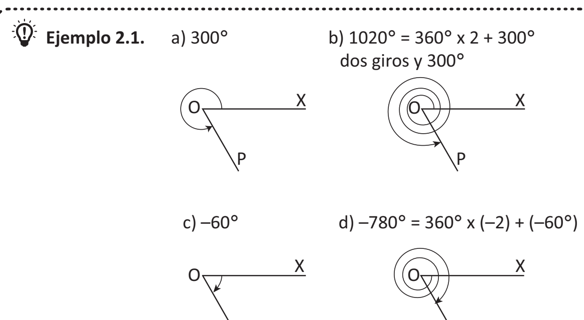
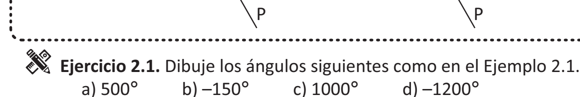


Fig. 2.1

El término "antihorario" quiere decir sentido contra el giro de las manecillas del reloj.

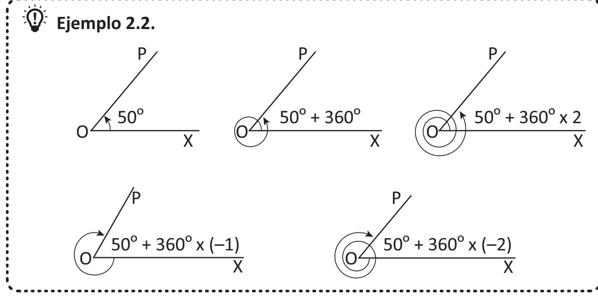
Ejemplo 2.1. a) 300° b) 1020° = 360° x 2 + 300° dos giros y 300°

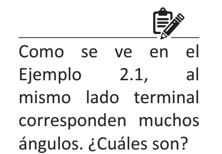




Ejercicio 2.1. Dibuje los ángulos siguientes como en el Ejemplo 2.1.
a) 500° b) –150° c) 1000° d) –1200°

Ejemplo 2.2.





Como se ve en el Ejemplo 2.1, al mismo lado terminal corresponden muchos ángulos. ¿Cuáles son?

Al lado terminal $\overrightarrow{OP}$ corresponden los ángulos 50° + 360°n (donde n es un número entero).

360°n = 360° x n

(5min)

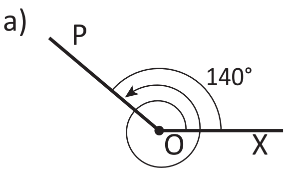


Ejemplo 2.1 (7 min)

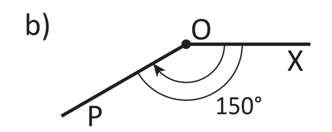


Ejercicio 2.1
(7 min) Solución

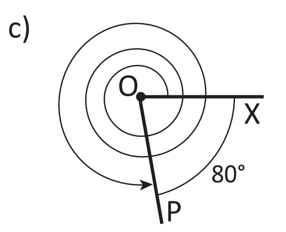
a)



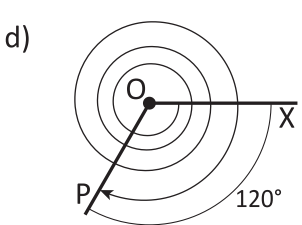
b)

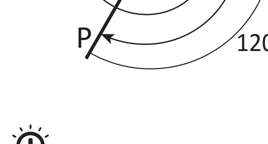


c)



d)





Ejemplo 2.2
(8 min)
Estos ángulos se pueden representar en varias formas como ser
410° + 360° n,
770° + 360° n,
–310°+ 360° n,
–670° + 360° n

Unidad II. Lección 2.

Clase 1
(Continuación)

Clase 2
(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: Entender las funciones trigonométricas con relación al ángulo de referencia.
Deducir ciertas propiedades de las funciones trigonométrica.

Evaluación: Ejercicio 2.4

Como en el ejemplo 2.2, θ no es único.

 **Ejercicio 2.2**
(5min) Solución
a) 40° + 360° n
b) 140° + 360° n
c) –130° + 360° n
d) –40° + 360° n
(n: número entero)
Hay otras formas.
En el plano coordenado siempre se toma la parte no negativo del eje x como el lado inicial.



Ejemplo 2.3 y 2.4
(8 min)



Ejercicio 2.3
(5min) Solución

a) 1500°=360°x4 + 60°
primer cuadrante

b) 2000°=360°x5+ 200°
tercer cuadrante

c) –1000°=360°x(–3)+ 80°
primer cuadrante

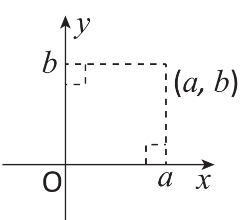
d) –1500°=360°x(–5)+ 300°
cuarto cuadrante

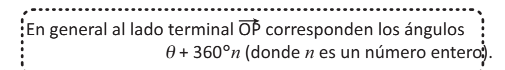
[Hasta aquí Clase 1]

[Desde aquí Clase 2]

Definición (15min)

Definición de las coordenadas



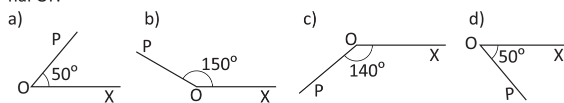


En general al lado terminal $\overrightarrow{OP}$ corresponden los ángulos $\theta + 360°n$ (donde n es un número entero).

P θ O X

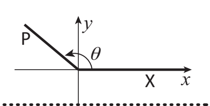
Fig. 2.2

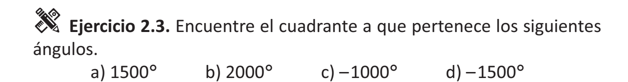
Ejercicio 2.2. Encuentre los ángulos que corresponden al lado terminal $\overrightarrow{OP}$.



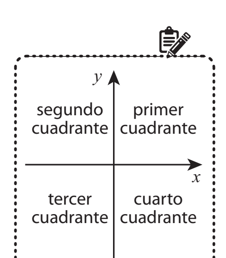
Cuando se toma la parte no negativa del eje x como el lado inicial, dependiendo en qué cuadrante está el lado terminal, se dice que el ángulo es de dicho cuadrante.

Ejemplo 2.3. θ es un ángulo del segundo cuadrante.





Ejemplo 2.4. Como 1000° = 360° x 2 + 280° = 360° x 2 + (90° x 3 + 10°) el ángulo 1000º es del cuarto cuadrante.



El lado inicial coincide con la parte positiva del eje x.

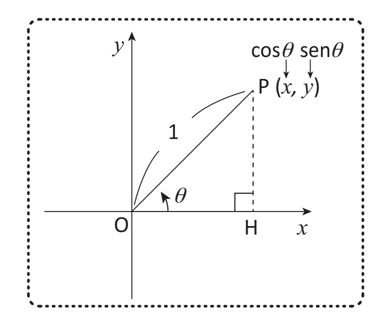
Ejercicio 2.3. Encuentre el cuadrante a que pertenece los siguientes ángulos.
a) 1500° b) 2000° c) –1000° d) –1500°

Clase 2. Definición de funciones trigonométricas de cualquier ángulo

Cuando θ es un ángulo agudo,
OH = la coordenada x del Punto P
PH = la coordenada y del punto P
En el triángulo rectángulo ΔOPH, OP = 1,

por lo tanto

$$\cos\theta = \frac{OH}{OP} = OH$$
$$\operatorname{sen}\theta = \frac{PH}{OP} = PH,$$
$$\tan\theta = \frac{PH}{OH}$$



58 | Unidad II • Lección 2 • Clase 2. Definición de funciones trigonométricas de cualquier ángulo

es decir

- $\cos\theta$ = la coordenada x del punto P
- $\text{sen}\,\theta$ = la coordenada y del punto P
- $\tan\theta = \frac{y}{x}$

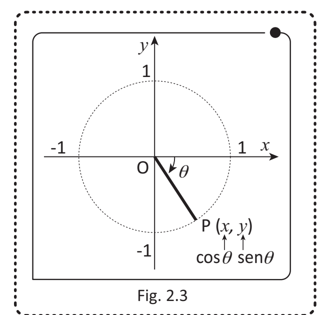


Fig. 2.3

Utilizando esta relación entre $\text{sen}\,\theta$, $\cos\theta$ y $\tan\theta$ y las coordenadas del punto P, se definen los valores de estas funciones para cualquier ángulo como lo siguiente.

En la Fig. 2.3 el punto P está en la circunferencia de radio 1 con el centro en el origen y se toma la parte positivo del eje x como el lado inicial y el rayo $\overrightarrow{OP}$ como el lado terminal.

Ahora se definen

$\text{sen}\,\theta = y$, $\cos\theta = x$, $\tan\theta = \frac{y}{x}$

($\tan\theta$ se define sólo cuando $x \neq 0$)

Las otras funciones se definen así:

$\sec\theta = \frac{1}{x}$ (sólo cuando $x \neq 0$),

$\csc\theta = \frac{1}{y}$ (sólo cuando $y \neq 0$)

$\cot\theta = \frac{x}{y}$ (sólo cuando $y \neq 0$)

De esta definición se sabe que los valores de las funciones trigonométricas dependen de la posición del rayo $\overrightarrow{OP}$. Si el ángulo θ corresponde a $\overrightarrow{OP}$, todos los ángulos que corresponden al mismo son $\theta + 360°n$ (n: número entero). Por lo tanto se tiene lo siguiente:

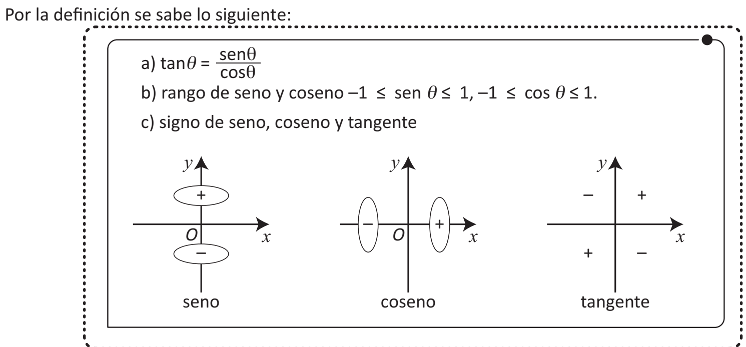
$\text{sen}(\theta + 360°n) = \text{sen}\,\theta$, $\cos(\theta + 360°n) = \cos\theta$, $\tan(\theta + 360°n) = \tan\theta$ (n: número entero)

Por la definición se sabe lo siguiente:

a) $\tan\theta = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}$

b) rango de seno y coseno $-1 \leq \text{sen}\,\theta \leq 1$, $-1 \leq \cos\theta \leq 1$.

c) signo de seno, coseno y tangente



Unidad II • Lección 2 • Clase 2. Definición de funciones trigonométricas de cualquier ángulo | 59

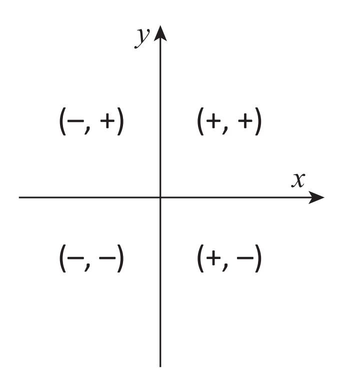


Hay que memorizar la Fig.2.3.

(10min)

Estas son las propiedades que se deduce fácilmente de la definición.

Los signos de las coordenadas



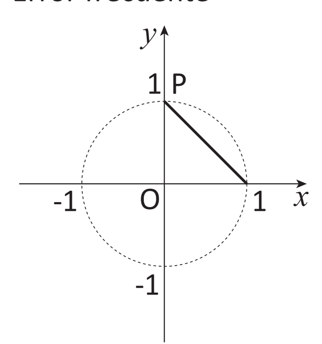
Clase 2
(Continuación)

Ejemplo2.5
(10min)

Encontrar las coordenadas colocando uno de los triángulos especiales.

Si se traza la perpendicular al eje y, es posible tomar el valor de seno como el de coseno.

Ejemplo2.6
(5min)
Error frecuente



No tiene sentido este segmento oblicuo.

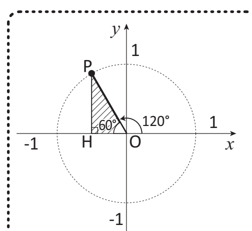
Ejercicio 2.4
(5min) Solución.
El signo / : no está definido

Ejemplo 2.5. Encuentre los valores de sen120°, cos120°, tan120° sin utilizar la tabla.

Solución: Se trata de las coordenadas del punto P.
Sea H el pie de la perpendicular al eje x que pasa por el punto P.
∠POH = 180° – 120° = 60°, por lo tanto colocando el triángulo (2) de la Fig.1.4 se sabe que
HO = $\frac{1}{2}$ y PH = $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
La coordenada x del punto P es negativa y la de y es positiva.
Por lo tanto $x = -\frac{1}{2}$ y $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$
Por la definición

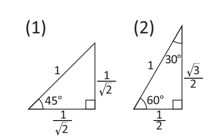
$$\text{sen}120° = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \cos120° = -\frac{1}{2},$$

$$\tan120° = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \div \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(-\frac{2}{1}\right) = -\sqrt{3}$$



Siempre se traza la perpendicular al eje x.

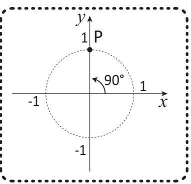
Triángulos especiales (Lec.1. Clase 2)



Al ángulo ∠POH, se le llama **ángulo de referencia**.

Ejemplo 2.6. Encuentre los valores de sen90°, cos90°, tan90°.

Solución: Las coordenadas del punto P son (0, 1).
Por la definición, sen90° = 1, cos90° = 0, tan90° no está definida, porque el denominador (la coordenada x de P) es 0.



En este caso no se puede formar un triángulo rectángulo.

Ejercicio 2.4. Llene la tabla.
Véase Ejercicio 3 de la Lección I. No es necesario racionalizar el denominador.

		1er. cuadrante				2do. cuadrante				3er. cuadrante				4to. cuadrante			
	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
sen																	
cos																	
tan																	

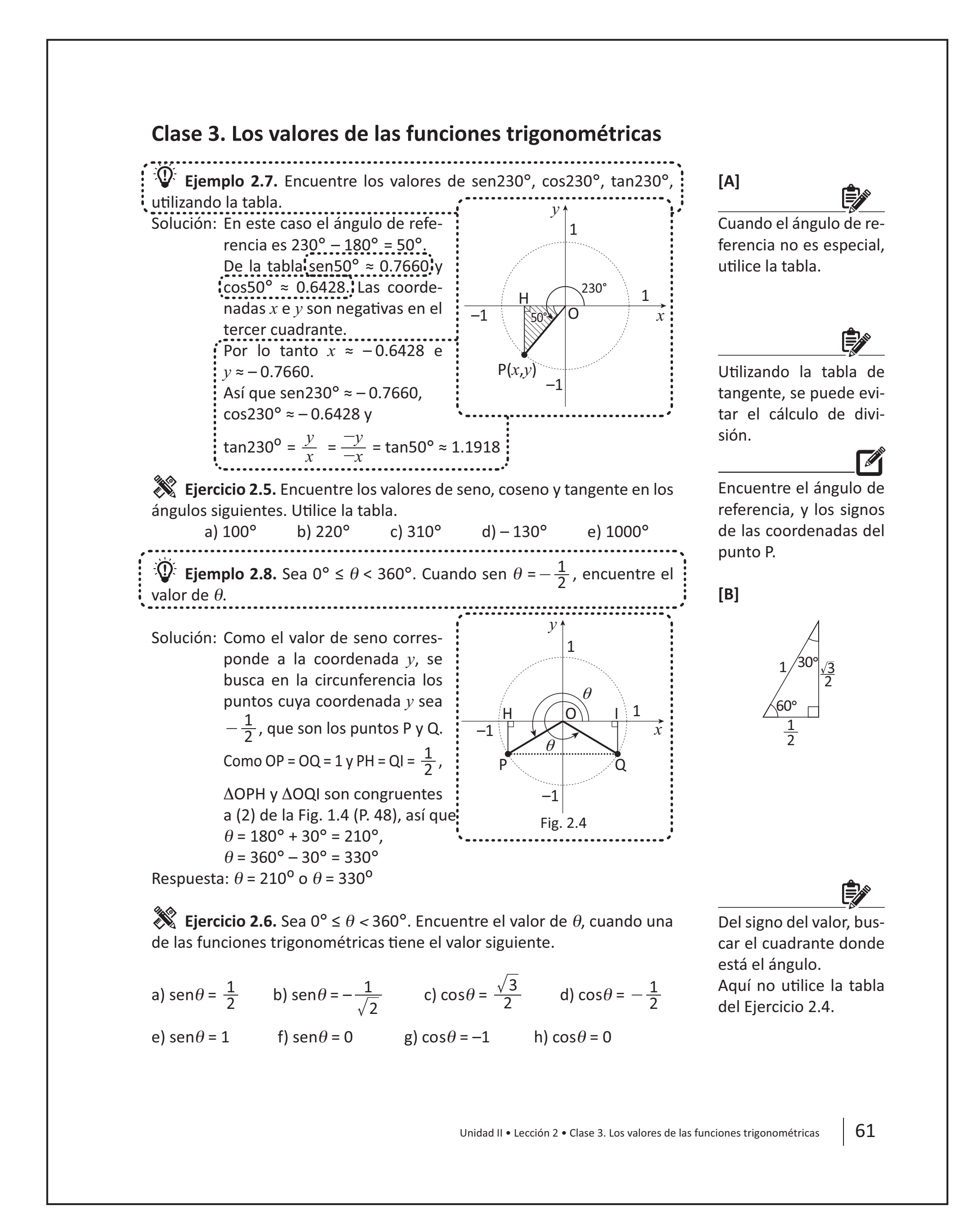
60 | Unidad II • Lección 2 • Clase 2. Definición de funciones trigonométricas de cualquier ángulo

	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	/	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	/	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

Objetivo: **[A]** Encontrar los valores trigonométricos utilizando la tabla y el ángulo de referencia.
[B] Encontrar el valor del ángulo utilizando las funciones trigonométricas.

Unidad II. Lección 2.
Clase 3
(Continúa en la siguiente página)

Evaluación: Ejercicio 2.5, 2.6



Clase 3. Los valores de las funciones trigonométricas

Ejemplo 2.7. Encuentre los valores de sen230°, cos230°, tan230°, utilizando la tabla.

Solución: En este caso el ángulo de referencia es 230° – 180° = 50°. De la tabla sen50° ≈ 0.7660 y cos50° ≈ 0.6428. Las coordenadas x e y son negativas en el tercer cuadrante.
Por lo tanto $x \approx -0.6428$ e $y \approx -0.7660$.
Así que sen230° ≈ – 0.7660, cos230° ≈ – 0.6428 y
tan230° = $\frac{y}{x} = \frac{-y}{-x}$ = tan50° ≈ 1.1918

Ejercicio 2.5. Encuentre los valores de seno, coseno y tangente en los ángulos siguientes. Utilice la tabla.
a) 100° b) 220° c) 310° d) – 130° e) 1000°

Ejemplo 2.8. Sea 0° ≤ θ < 360°. Cuando sen $\theta = -\frac{1}{2}$, encuentre el valor de θ.

Solución: Como el valor de seno corresponde a la coordenada y, se busca en la circunferencia los puntos cuya coordenada y sea $-\frac{1}{2}$, que son los puntos P y Q.
Como OP = OQ = 1 y PH = QI = $\frac{1}{2}$,
ΔOPH y ΔOQI son congruentes a (2) de la Fig. 1.4 (P. 48), así que
θ = 180° + 30° = 210°,
θ = 360° – 30° = 330°
Respuesta: θ = 210° o θ = 330°

Fig. 2.4

Ejercicio 2.6. Sea 0° ≤ θ < 360°. Encuentre el valor de θ, cuando una de las funciones trigonométricas tiene el valor siguiente.

a) sen$\theta = \frac{1}{2}$ b) sen$\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ c) cos$\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ d) cos$\theta = -\frac{1}{2}$
e) senθ = 1 f) senθ = 0 g) cosθ = –1 h) cosθ = 0

[A]
Cuando el ángulo de referencia no es especial, utilice la tabla.

Utilizando la tabla de tangente, se puede evitar el cálculo de división.

Encuentre el ángulo de referencia, y los signos de las coordenadas del punto P.

[B]

Del signo del valor, buscar el cuadrante donde está el ángulo.
Aquí no utilice la tabla del Ejercicio 2.4.

Unidad II • Lección 2 • Clase 3. Los valores de las funciones trigonométricas | 61

Tener en cuenta que los lados terminales que corresponden a θ son simétricos con respecto al eje y en caso de seno, x en caso de coseno.

Ejemplo2.7
(10min) Para encontrar el ángulo de referencia, se traza la perpendicular al eje x.

Ejercicio 2.5
(10min) Solución

	senθ	cosθ	tanθ
a)	0.9848	–0.1736	–5.6713
b)	–0.6428	–0.7660	0.8391
c)	–0.7660	0.6428	–1.1918
d)	–0.7660	–0.6428	1.1918
e)	–0.9848	0.1736	–5.6713

Ejemplo 2.8
(10min) Siempre colocar uno de los triángulos especiales de la Fig. 2.4.

Ejercicio 2.6
(10min) Solución
a) θ = 30°, 150°
b) θ = 225°, 315°
c) θ = 30°, 330°
d) θ = 120°, 240°
e) θ = 90°
f) θ = 0°, 180°
g) θ = 180°
h) θ = 90°, 270°

Unidad II. Lección 2.

Clase 3
(Continuación)

Clase 4
(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: Deducir las coordenadas que representa el valor de la tangente.
Encontrar el valor del ángulo de la tangente.

Evaluación: Ejercicio 2.8



Ejercicio 2.7
(5 min) Solución
a) θ = 20°, 160°
b) θ = 245°, 295°
c) θ = 20°, 340°
d) θ = 122°, 238°

[Hasta aquí Clase 3]

[Desde aquí Clase 4]

Comprender la relación gráfica de la ecuación y = tanθ y el punto (1, tanθ). (20 min).



Ejemplo 2.9
(10 min)

Ejercicio 2.8
(10 min) Solución
a) θ = 60°, –120°
b) θ = 45°, –135°
c) θ = 30°, –150°
d) θ = 135°, –45°
e) θ = 150°, –30°
f) θ = 0°, –180°

Observar que los lados terminales que corresponden a los valores quedan en una recta.

Ejercicio 2.9
(5 min) Solución.
a) θ = 20°, –160°
b) θ = 65°, –115°
c) θ = 145°, –35°
d) θ = 100°, –80°

Ejercicio 2.7. Sea 0° ≤ θ < 360°. Encuentre el valor de θ, cuando uno de las funciones trigonométricas tiene el valor siguiente. Utilice la tabla.

a) senθ = 0.3420 b) senθ = – 0.9063 c) cosθ = 0.9397 d) cosθ = – 0.5299

Clase 4. Valor de la tangente

Sea $y = mx$ la ecuación de la recta $\overleftrightarrow{OP}$. Sustituyendo las coordenadas del punto P que son (cosθ, senθ), se tiene que senθ = $m$cosθ. Si cosθ ≠ 0, se tiene que

$m = \dfrac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$.

Es decir, la ecuación de la recta $\overleftrightarrow{OP}$ es y = tan$\theta\,x$ ... (1)

El punto Q está en la recta $\overleftrightarrow{OP}$ y su coordenada x es 1, por lo tanto su coordenada y es tanθ, sustituyendo x = 1 en (1).

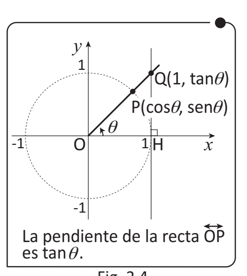


Fig. 2.4

La Fig. 2.4 es muy importante.

En resumen las coordenadas del punto Q son (1, tanθ).

Ejemplo 2.9. Sea – 180° ≤ θ < 180°. Cuando tanθ = $-\sqrt{3}$, encuentre el valor de θ.

Solución: El triángulo ΔOQH es congruente al (2) de Fig. 1.3, por lo tanto
θ = – 60° y
θ = – 60° + 180° = 120°

Respuesta: θ = – 60° o 120°

(Figura: R, y, 1, θ, -1, O, θ, 1, H, x, P, -1, Q(1, $-\sqrt{3}$))

Para dibujar esta gráfica, primero se toma el punto Q cuyo coordenada es (1, tanθ). θ = – 60° corresponde a P, θ = 120° a R.

Ejercicio 2.8. Sea – 180° ≤ θ < 180°. Cuando tanθ tiene el valor siguiente, encuentre el valor de θ. No utilice la tabla al final del texto.

a) tanθ = $\sqrt{3}$ b) tanθ = 1, c) tanθ = $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

d) tanθ = – 1 e) tanθ = $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ f) tanθ = 0

Cuando no se utiliza la tabla, siempre hay que tratar de encontrar los triángulos de la Fig.1.3.

Ejercicio 2.9. Sea – 180° ≤ θ < 180°. Cuando tanθ tiene el valor siguiente, encuentre el valor de θ. Utilice la tabla.

a) tanθ = 0.3640 b) tanθ = 2.1445 c) tanθ = – 0.7002 d) tanθ = – 5.6713

Utilice los ángulos de referencia y la distribución del signo de la tangente (Clase 2).

62 | Unidad II • Lección 2 • Clase 4. Valor de la tangente

Objetivo: Comprender y usar la relación entre seno y coseno.

Evaluación: Ejercicio 2.10

Unidad II. Lección 2.
Clase 5
(Continúa en la siguiente página)

Clase 5. Relación entre seno y coseno

En la figura de la definición de las funciones trigonométricas, aplicando la fórmula de la distancia entre dos puntos, se tiene que

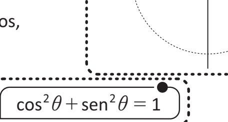
$OP = \sqrt{\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta}$

y; P($\cos\theta$, senθ); -1; 1; x; O; H

Elevando a la dos ambos lados,

$OP^2 = \text{sen}^2\theta + \cos^2\theta$

Como OP = 1, se tiene que



$$\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta = 1$$

Como el teorema de Pitágoras da la fórmula de la distancia, esta fórmula de arriba se deduce aplicando dicho teorema.

La distancia entre (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Se escribe sen$^2\theta$ para (senθ)^2 y se aplica la misma manera a $\cos\theta$ y $\tan\theta$.

Es la fórmula más importante en la trigonometría.

Ejemplo 2.10. Dado que sen$\theta = \frac{2}{3}$, encuentre $\cos\theta$ y $\tan\theta$.

Solución: sen$^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cos^2\theta = 1$ Sustituyendo sen $\theta = \frac{2}{3}$

$\cos^2\theta = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2$ Despejando $\cos^2\theta$

$= 1 - \frac{4}{9}$

$= \frac{5}{9}$

$\cos\theta = \pm\sqrt{\frac{5}{9}}$ Sacando la raíz cuadrada

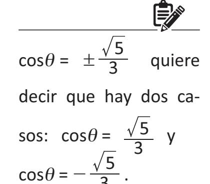
$= \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$

$\tan\theta = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}$

Si $\cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\tan\theta = \frac{2}{3} \div \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

Si $\cos\theta = -\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\tan\theta = \frac{2}{3} \div \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right) = -\frac{2}{3} \times \frac{3}{\sqrt{5}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}$

Respuesta: $\cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$ y $\tan\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$ o $\cos\theta = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ y $\tan\theta = -\frac{2}{\sqrt{5}}$



$\cos\theta = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$ quiere decir que hay dos casos: $\cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$ y $\cos\theta = -\frac{\sqrt{5}}{3}$.

La primera pareja corresponde al ángulo del primer cuadrante y la segunda al del segundo.

Ejercicio 2.10. Cuando seno o coseno está dado, encuentre el otro y la tangente.

a) sen$\theta = \frac{3}{5}$ b) sen$\theta = -\frac{3}{4}$ c) $\cos\theta = \frac{1}{3}$ d) $\cos\theta = -\frac{4}{5}$

Unidad II • Lección 2 • Clase 5. Relación entre seno y coseno | 63

(15 min)

Observe que esta fórmula es otra expresión del teorema de Pitágoras. [La fórmula de la distancia entre dos puntos se deduce del mismo].

Ejemplo 2.10
(10 min) Si los estudiantes tienen la dificultad en el uso del signo ±, se puede calcular el valor de la tangente separadamente en dos casos.

Ejercicio 2.10
(10 min) Solución

a) $\cos^2\theta = \frac{16}{25}$,
$\cos\theta = \pm\frac{4}{5}$,
$\tan\theta = \pm\frac{3}{4}$

b) $\cos^2\theta = \frac{7}{16}$,
$\cos\theta = \pm\frac{\sqrt{7}}{4}$,
$\tan\theta = \mp\frac{3}{\sqrt{7}}$

c) sen$^2\theta = \frac{8}{9}$,
sen$\theta = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$,
$\tan\theta = \pm 2\sqrt{2}$

c) sen$^2\theta = \frac{9}{25}$,
sen$\theta = \pm\frac{3}{5}$,
$\tan\theta = \mp\frac{3}{4}$

Unidad II. Lección 2.

Clase 5
(Continuación)

Clase 6
(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: Encontrar y utilizar la relación entre coseno y tangente.

Evaluación: Ejercicio 2.12

Ejemplo 2.11
(5 min)



Ejercicio 2.11
(5 min) Solución

a) $\cos\theta = \sqrt{1 - \text{sen}^2\theta}$
$= \dfrac{\sqrt{5}}{3}$,
$\tan\theta = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

b) $\cos\theta = -\sqrt{1 - \text{sen}^2\theta}$
$= -\dfrac{\sqrt{21}}{5}$,
$\tan\theta = -\dfrac{2}{\sqrt{21}}$

c) $\text{sen}\theta = -\sqrt{1 - \cos^2\theta}$
$= -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$,
$\tan\theta = 2\sqrt{2}$

d) $\text{sen}\theta = -\sqrt{1 - \cos^2\theta}$
$= -\dfrac{\sqrt{7}}{4}$,
$\tan\theta = -\dfrac{\sqrt{7}}{3}$

[Hasta aquí Clase 5]

[Desde aquí Clase 6]

Demostración (7 min)

Ejemplo 2.12
(8 min)

***Ejemplo 2.11.** Dado que el ángulo θ está en el cuarto cuadrante y $\text{sen}\,\theta = -\frac{3}{4}$, encuentre $\cos\theta$ y $\tan\theta$.

Solución: $\cos^2\theta = 1 - \left(-\frac{3}{4}\right)^2$ Sustituyendo $\text{sen}\theta = -\frac{3}{4}$

$= 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$

Como θ es del cuarto cuadrante, $\cos\theta > 0$, por lo tanto

$\cos\theta = \sqrt{\frac{7}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$

$\tan\theta = \dfrac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} = \dfrac{-\frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{7}}{4}} = \left(-\frac{3}{4}\right) \div \frac{\sqrt{7}}{4} = -\frac{3}{4} \times \frac{4}{\sqrt{7}} = -\frac{3}{\sqrt{7}}$

Respuesta $\cos\theta = \frac{\sqrt{7}}{4}$ y $\tan\theta = -\frac{3}{\sqrt{7}}$

La condición sobre la posición del ángulo define el signo de funciones trigonométricas (Clase 2).

***Ejercicio 2.11.** Dado el cuadrante del ángulo y uno de $\text{sen}\theta$ y $\cos\theta$, encuentre el otro y $\tan\theta$.

a) primer cuadrante, $\text{sen}\theta = \frac{2}{3}$ b) segundo cuadrante, $\text{sen}\theta = \frac{2}{5}$

c) tercer cuadrante, $\cos\theta = -\frac{1}{3}$ d) cuarto cuadrante, $\cos\theta = \frac{3}{4}$

Clase 6. Relación entre coseno y tangente

Entre $\cos\theta$ y $\tan\theta$ existe la siguiente relación:

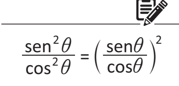
$$\tan^2\theta + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta} \quad \text{donde } \cos\theta \neq 0$$

Demostración

$\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ Relación entre $\text{sen}\theta$ y $\cos\theta$

$\dfrac{\text{sen}^2\theta}{\cos^2\theta} + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ Dividiendo ambos lados por $\cos^2\theta$

$\tan^2\theta + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ $\dfrac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$



$\dfrac{\text{sen}^2\theta}{\cos^2\theta} = \left(\dfrac{\text{sen}\theta}{\cos\theta}\right)^2$

Se obtiene la primera igualdad cambiando los lados de la fórmula.

Ejemplo 2.12. Cuando $\tan\theta = 2$, encuentre los valores de $\cos\theta$ y $\text{sen}\theta$.

Solución: $\dfrac{1}{\cos^2\theta} = \tan^2\theta + 1$

$= 2^2 + 1$ Sustituyendo $\tan\theta = 2$

$= 5$

64 | Unidad II • Lección 2 • Clase 6. Relación entre coseno y tangente

Cuando se obtenga el valor de $\cos\theta$, se puede utilizar la fórmula $\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ pero ésta no da el signo del $\text{sen}\theta$. Hay que utilizar la relación $\text{sen}\theta = \tan\theta \cdot \cos\theta$

Objetivo: Utilizar la relación entre seno y coseno para demostrar igualdades.

Evaluación: Ejercicio 2.15, 2.16

Unidad II. Lección 2.

Clase 6

(Continuación)

Clase 7

(Continúa en la siguiente página)

$\cos^2\theta = \frac{1}{5}$

$\cos\theta = \pm\sqrt{\frac{1}{5}} = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$

Cuando $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\text{sen}\,\theta = \tan\theta\cos\theta = 2 \times \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

Cuando $\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\text{sen}\,\theta = \tan\theta\cos\theta = 2 \times \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{2}{\sqrt{5}}$

Respuesta: $\text{sen}\,\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$ y $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ó $\text{sen}\,\theta = -\frac{2}{\sqrt{5}}$ y $\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

Si $\frac{b}{a} = \frac{d}{c} \neq 0$ entonces $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

De la relación $\tan\theta = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}$ se obtiene $\tan\theta\cos\theta = \text{sen}\,\theta$

Ejercicio 2.12. Cuando $\tan\theta$ tiene los valores siguientes, encuentre los valores de $\cos\theta$ y sen θ.

a) $\tan\theta = 3$ b) $\tan\theta = -2$ c) $\tan\theta = \frac{2}{3}$ d) $\tan\theta = -\frac{1}{3}$

Ejercicio 2.13. Dado que el ángulo está en el rango indicado y que $\tan\theta$ tiene el valor siguiente, encuentre senθ y $\cos\theta$.

a) $-90° \leq \theta < 90°$, $\tan\theta = 3$ b) $0° \leq \theta < 180°$, $\tan\theta = -\frac{1}{2}$

c) $90° \leq \theta < 270°$, $\tan\theta = -\frac{1}{3}$ d) $180° \leq \theta < 360°$, $\tan\theta = \frac{3}{4}$

La combinación del rango del ángulo y el signo de $\tan\theta$, define el cuadrante al que pertenece el ángulo. (Clase 2).

Ejercicio 2.14. En el Ejemplo 2.12, cuando $\cos\theta > 0$, encuentre los valores de $\sec\theta$, $\csc\theta$ y $\cot\theta$.

Clase 7. Demostración de igualdades utilizando la relación entre senθ y cosθ

Ejemplo 2.13. Demuestre la siguiente igualdad.
$(\text{sen}\,\theta + \cos\theta)^2 - 1 = 2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta$

Solución: $\{(\text{sen}\,\theta + \cos\theta)^2 - 1\} - 2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta$

$= \text{sen}^2\theta + 2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta + \cos^2\theta - 1 - 2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta$

$= (\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta) - 1$

$= 1 - 1$

$= 0$

Una manera de demostrar la igualdad es mostrar que (el lado izquierdo) – (el lado derecho) = 0

Ejercicio 2.15. Demuestre las siguientes igualdades.

a) $(1 + \text{sen}\,\theta)(1 - \text{sen}\,\theta) = \cos^2\theta$ b) $\left(\frac{1}{\cos\theta} + \tan\theta\right)\left(\frac{1}{\cos\theta} - \tan\theta\right) = 1$

Unidad II • Lección 2 • Clase 7. Demostración de igualdades utilizando la relación | 65

Ejercicio 2.12
(10 min) Solución

a) $\cos\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\text{sen}\,\theta = \pm\frac{3}{\sqrt{10}}$

b) $\cos\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\text{sen}\,\theta = \mp\frac{2}{\sqrt{5}}$

c) $\cos\theta = \pm\frac{3}{\sqrt{13}}$, $\text{sen}\,\theta = \pm\frac{2}{\sqrt{13}}$

d) $\cos\theta = \pm\frac{3}{\sqrt{10}}$, $\text{sen}\,\theta = \mp\frac{1}{\sqrt{10}}$

Ejercicio 2.13
(10 min) Solución

a) $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{10}}$, $\text{sen}\,\theta = \frac{3}{\sqrt{10}}$

b) $\cos\theta = -\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\text{sen}\,\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$

c) $\cos\theta = -\frac{3}{\sqrt{10}}$, $\text{sen}\,\theta = \frac{1}{\sqrt{10}}$

d) $\cos\theta = -\frac{4}{5}$, $\text{sen}\,\theta = -\frac{3}{5}$

Ejercicio 2.14
(10 min) Solución

$\sec\theta = \sqrt{5}$, $\csc\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $\cot\theta = \frac{1}{2}$

[Hasta aquí Clase 6]

[Desde aquí Clase 7]



Ejemplo 2.13 (7 min)

Ejercicio 2.15. (8 min) Solución

a) $(1 + \text{sen}\,\theta)(1 - \text{sen}\,\theta) - \cos^2\theta = 1 - (\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta) = 1 - 1 = 0$

b) $\left(\frac{1}{\cos\theta} + \tan\theta\right)\left(\frac{1}{\cos\theta} - \tan\theta\right) - 1 = \frac{1}{\cos^2\theta} - (\tan^2\theta + 1) = \frac{1}{\cos^2\theta} - \frac{1}{\cos^2\theta} = 0$

Unidad II. Lección 2.

Clase 7
(Continuación)

Clase 8
(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: Entender y memorizar las relaciones 1) a 4) entre las funciones trigonométricas.

Evaluación: Ejercicio 2.18, 2.19

Ejercicio 2.16

(10 min) Solución. Por el resultado del Ejemplo 2.13, se tiene que

$\text{sen}\theta \cdot \cos\theta$

$= \frac{1}{2}\{(\text{sen}\theta + \cos\theta)^2 - 1\}$

$= \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 1\right\}$

$= -\frac{5}{18}$



Ejemplo 2.14

(10 min). Aunque los estudiantes todavía no han aprendido la expresión racional, podrán entender el cálculo.



Ejercicio 2.17

(10 min) Solución.

a) $\frac{\text{sen}\theta}{1+\cos\theta} + \frac{\text{sen}\theta}{1-\cos\theta}$

$= \frac{\text{sen}\theta(1-\cos\theta) + \text{sen}\theta(1+\cos\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}$

$= \frac{2\text{sen}\theta}{1-\cos^2\theta} = \frac{2\text{sen}\theta}{\text{sen}^2\theta} = \frac{2}{\text{sen}\theta}$

b) $\tan\theta + \frac{1}{\tan\theta}$

$= \frac{\text{sen}\theta}{\cos\theta} + \frac{1}{\frac{\text{sen}\theta}{\cos\theta}}$

$= \frac{\text{sen}\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\text{sen}\theta}$

$= \frac{\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta}{\cos\theta\text{sen}\theta}$

$= \frac{1}{\text{sen}\theta\cos\theta}$

[Hasta aquí Clase 7]

Ejercicio 2.16. Utilizando la igualdad del Ejemplo2.13, encuentre el valor de $\text{sen}\theta\cos\theta$ cuando $\text{sen}\theta + \cos\theta = \frac{2}{3}$

Ejemplo 2.14. Demuestre que

$$\frac{\cos\theta}{1-\text{sen}\theta} - \frac{\cos\theta}{1+\text{sen}\theta} = 2\tan\theta$$

Solución:

$$\frac{\cos\theta}{1-\text{sen}\theta} - \frac{\cos\theta}{1+\text{sen}\theta} = \frac{\cos\theta(1+\text{sen}\theta)-(1-\text{sen}\theta)\cos\theta}{(1-\text{sen}\theta)(1+\text{sen}\theta)}$$

$$= \frac{\cos\theta + \cos\theta\text{sen}\theta - \cos\theta + \cos\theta\text{sen}\theta}{1^2 - \text{sen}^2\theta}$$

$$= \frac{2\cos\theta\text{sen}\theta}{1-\text{sen}^2\theta}$$

$$= \frac{2\cos\theta\text{sen}\theta}{\cos^2\theta} = \frac{2\text{sen}\theta}{\cos\theta} = 2\tan\theta$$

$\frac{b}{a} - \frac{d}{c} = \frac{bc-ad}{ac}$

Ejercicio 2.17. Demuestre las siguientes igualdades.

a) $\frac{\text{sen}\theta}{1+\cos\theta} + \frac{\text{sen}\theta}{1-\cos\theta} = \frac{2}{\text{sen}\theta}$ b) $\tan\theta + \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\text{sen}\theta\cos\theta}$

*** Clase 8. Relaciones entre las funciones trigonométricas 1**

1) $f(\theta + 360°n) = f(\theta)$ n: números enteros
$f = \text{sen}\theta$ o $\cos\theta$ o $\tan\theta$ o $\sec\theta$ o $\csc\theta$ o $\cot\theta$

Se ha visto en la Clase 2

2) $\text{sen}(180° - \theta) = \text{sen}\theta$, $\cos(180° - \theta) = -\cos\theta$, $\tan(180° - \theta) = -\tan\theta$

Demostración: El punto Q es el simétrico de P(a, b) con respecto al eje y, por lo tanto sus coordenadas son ($-a$, b). Por otra parte se tiene que:

$\text{sen}\theta = b$, $\text{sen}(180° - \theta) = b$

$\cos\theta = a$, $\cos(180° - \theta) = -a$

$\tan\theta = \frac{b}{a}$, $\tan(180° - \theta) = -\frac{b}{a}$

de lo que viene la fórmula.

y, 1, Q($-a$, b), P(a, b), 180°−θ, θ, x, -1, O, 1, -1

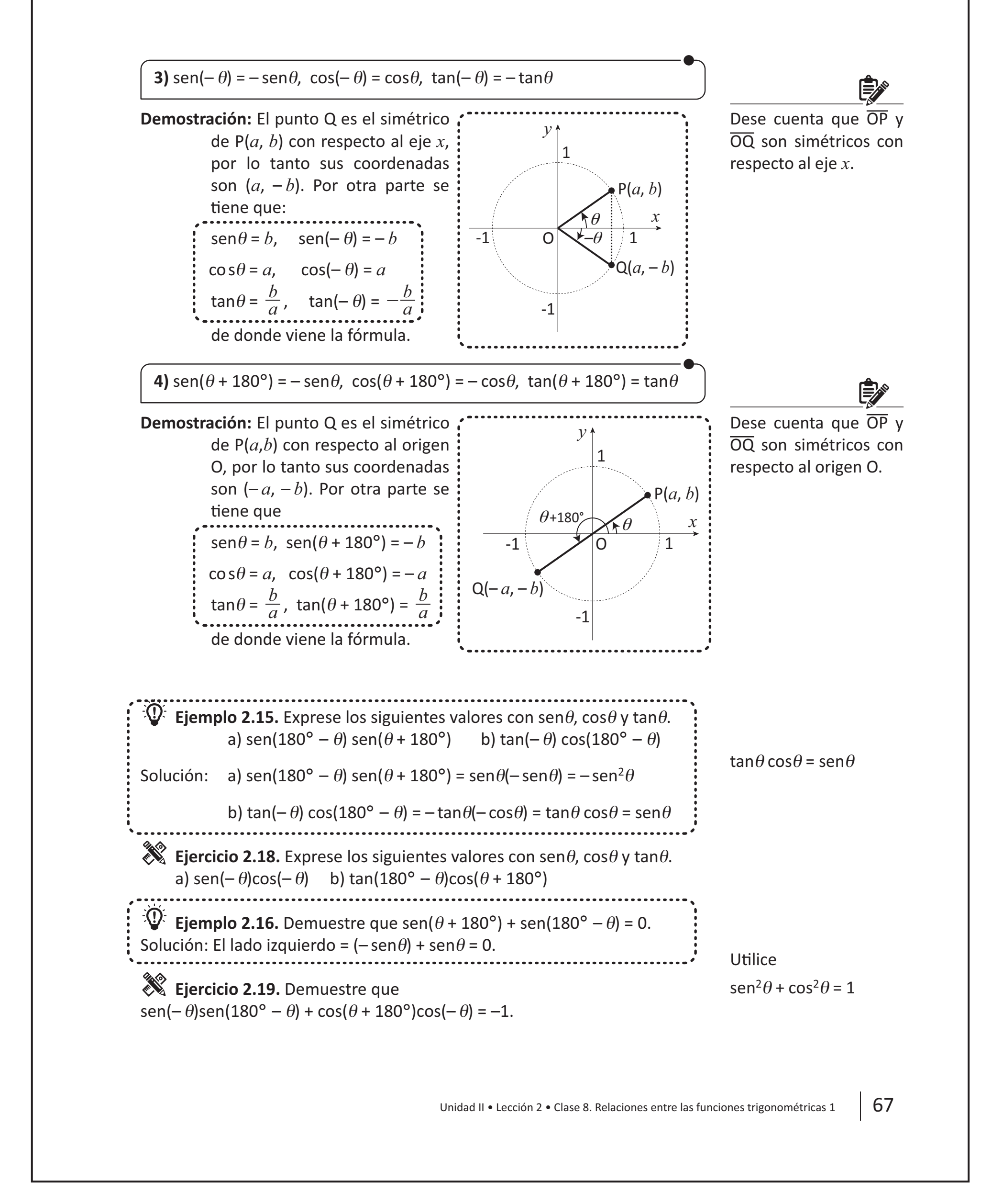
Dese cuenta que $\overline{OP}$ y $\overline{OQ}$ son simétricos con respecto al eje y. No trate de memorizar la fórmula, sino la gráfica.

66 | Unidad II • Lección 2 • Clase 8. Relaciones entre las funciones trigonométricas 1

[Desde aquí Clase 8]

1) (3 min) Hay que recordar que los valores trigonométricos solo dependen del lado terminal.
2) (8 min)

Clase 8
(Continuación)



3) $\text{sen}(-\theta) = -\text{sen}\theta$, $\cos(-\theta) = \cos\theta$, $\tan(-\theta) = -\tan\theta$

Demostración: El punto Q es el simétrico de P(a, b) con respecto al eje x, por lo tanto sus coordenadas son (a, $-b$). Por otra parte se tiene que:

$\text{sen}\theta = b$, $\text{sen}(-\theta) = -b$

$\cos\theta = a$, $\cos(-\theta) = a$

$\tan\theta = \frac{b}{a}$, $\tan(-\theta) = -\frac{b}{a}$

de donde viene la fórmula.

Dese cuenta que $\overline{OP}$ y $\overline{OQ}$ son simétricos con respecto al eje x.

4) $\text{sen}(\theta + 180°) = -\text{sen}\theta$, $\cos(\theta + 180°) = -\cos\theta$, $\tan(\theta + 180°) = \tan\theta$

Demostración: El punto Q es el simétrico de P(a,b) con respecto al origen O, por lo tanto sus coordenadas son ($-a$, $-b$). Por otra parte se tiene que

$\text{sen}\theta = b$, $\text{sen}(\theta + 180°) = -b$

$\cos\theta = a$, $\cos(\theta + 180°) = -a$

$\tan\theta = \frac{b}{a}$, $\tan(\theta + 180°) = \frac{b}{a}$

de donde viene la fórmula.

Dese cuenta que $\overline{OP}$ y $\overline{OQ}$ son simétricos con respecto al origen O.

Ejemplo 2.15. Exprese los siguientes valores con $\text{sen}\theta$, $\cos\theta$ y $\tan\theta$.

a) $\text{sen}(180° - \theta)\,\text{sen}(\theta + 180°)$ b) $\tan(-\theta)\cos(180° - \theta)$

Solución: a) $\text{sen}(180° - \theta)\,\text{sen}(\theta + 180°) = \text{sen}\theta(-\text{sen}\theta) = -\text{sen}^2\theta$

b) $\tan(-\theta)\cos(180° - \theta) = -\tan\theta(-\cos\theta) = \tan\theta\cos\theta = \text{sen}\theta$

$\tan\theta\cos\theta = \text{sen}\theta$

Ejercicio 2.18. Exprese los siguientes valores con $\text{sen}\theta$, $\cos\theta$ y $\tan\theta$.

a) $\text{sen}(-\theta)\cos(-\theta)$ b) $\tan(180° - \theta)\cos(\theta + 180°)$

Ejemplo 2.16. Demuestre que $\text{sen}(\theta + 180°) + \text{sen}(180° - \theta) = 0$.

Solución: El lado izquierdo $= (-\text{sen}\theta) + \text{sen}\theta = 0$.

Ejercicio 2.19. Demuestre que $\text{sen}(-\theta)\text{sen}(180° - \theta) + \cos(\theta + 180°)\cos(-\theta) = -1$.

Utilice $\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$

Unidad II • Lección 2 • Clase 8. Relaciones entre las funciones trigonométricas 1 | 67

3) (8 min)

Dese cuenta que en 2) a 4) hay simetría entre los dos lados terminales que corresponden a los dos valores del ángulo. Lo que hay que memorizar es esta relación, de la cual se deduce la formula fácilmente.

4) (8 min)

Ejemplo 2.15
(5 min)

Ejercicio 2.18
(4 min) Solución

a) $(-\text{sen}\theta)\cos\theta$
$= -\text{sen}\theta\cos\theta$

b) $(-\tan\theta)(-\cos\theta)$
$= \tan\theta\cos\theta$
$= \text{sen}\theta$

Ejemplo 2.16
(5 min)

Ejercicio 2.19
(4 min) Solución

El lado izquierdo
$= (-\text{sen}\theta)\text{sen}\theta + (-\cos\theta)\cos\theta$
$= -(\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta)$
$= -1$
= El lado derecho.

Unidad II. Lección 2.
* Clase 9
(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: Entender y memorizar las relaciones 5) a 6) entre las funciones trigonométricas.

Evaluación: Ejercicio 2.20

Repaso (4 min)

5) (8 min)

6) (8 min)

Tenga en cuenta el signo.

Ejemplo 2.17
(6 min)

Ejercicio 2.20
(6 min) Solución

$\cos(\theta + 90°) =$

$= \cos(90° - (-\theta))$

$= \text{sen}(-\theta)$ por 5)

$= -\text{sen}\theta$ por 3)

$\tan(\theta + 90°)$

$= \tan(90° - (-\theta))$

$= \dfrac{1}{\tan(-\theta)}$ por 5)

$= \dfrac{1}{-\tan\theta}$ por 3)

$= -\dfrac{1}{\tan\theta}$

Ejemplo 2.18
(6 min)

*** Clase 9. Relaciones entre las funciones trigonométricas 2**

5) $\text{sen}(90° - \theta) = \cos\theta$, $\cos(90° - \theta) = \text{sen}\theta$, $\tan(90° - \theta) = \dfrac{1}{\tan\theta}$

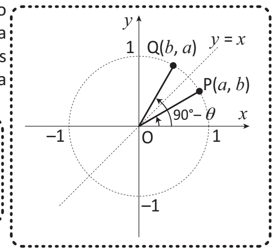
Demostración: El punto Q es el simétrico de P(a, b) con respecto a la recta $y = x$, por lo tanto sus coordenadas son (b, a). Por otra parte se tiene que:

$\text{sen}\theta = b$, $\text{sen}(90° - \theta) = a$

$\cos\theta = a$, $\cos(90° - \theta) = b$

$\tan\theta = \dfrac{b}{a}$, $\tan(90° - \theta) = \dfrac{a}{b}$

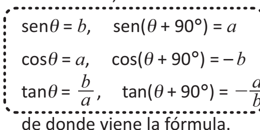
de donde viene la fórmula.



Dese cuenta que $\overline{OP}$ y $\overline{OQ}$ son simétricos con respecto a la recta $y = x$. En este caso si P(a, b), entonces Q(b, a)

6) $\text{sen}(\theta + 90°) = \cos\theta$, $\cos(\theta + 90°) = -\text{sen}\theta$, $\tan(\theta + 90°) = -\dfrac{1}{\tan\theta}$

Demostración: De la figura se sabe que si las coordenadas del punto P son (a, b), las de Q son ($-b$, a). Por lo tanto,

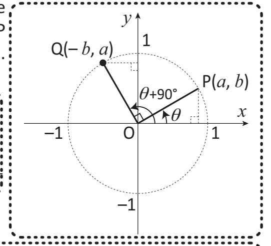


$\text{sen}\theta = b$, $\text{sen}(\theta + 90°) = a$

$\cos\theta = a$, $\cos(\theta + 90°) = -b$

$\tan\theta = \dfrac{b}{a}$, $\tan(\theta + 90°) = -\dfrac{a}{b}$

de donde viene la fórmula.



En la figura P está en el primer cuadrante. Dibuje y confirme que siempre hay la misma relación dondequiera que esté P.

Ejemplo 2.17. Demuestre que $\text{sen}(\theta + 90°) = \cos\theta$ utilizando la relación $\theta + 90° = 90° - (-\theta)$ y aplicando las fórmulas 5) y 3).

Solución: $\text{sen}(\theta + 90°) = \text{sen}(90° - (-\theta))$

$= \cos(-\theta)$ Aplicando 5)

$= \cos\theta$ Aplicando 3)

Ejercicio 2.20. De la misma manera demuestre las segunda y tercera fórmula de 6).

Ejemplo 2.18. Demuestre la siguiente igualdad.

$\text{sen}\theta\cos(90° - \theta) + \text{sen}(\theta + 90°)\cos\theta = 1$

Solución: El lado izquierdo

$= \text{sen}\theta\,\text{sen}\theta + \cos\theta\cos\theta$ De 5) y 6)

$= \text{sen}^2\theta + \cos^2\theta$

$= 1$ De la relación entre $\text{sen}\theta$ y $\cos\theta$

Exprese sólo con $\text{sen}\theta$ y $\cos\theta$.

68 | Unidad II • Lección 2 • Clase 6. Relación entre coseno y tangente

Objetivo: Convertir grados a radianes y viceversa.

Evaluación: Ejercicio 2.22, 2.23, 2.24

Unidad II. Lección 2.

* Clase 9
(Continuación)

Clase 10
(Continúa en la siguiente página)

Ejercicio 2.21. Demuestre las siguientes igualdades.

a) $\text{sen}\theta\cos(\theta + 90°) - \cos\theta\,\text{sen}(90° - \theta) = -1$

b) $\text{sen}(90° - \theta)\text{sen}(\theta + 90°) - \cos(90° - \theta)\cos(\theta + 90°) = 1$

Clase 10. Radián

Hay otra unidad de medida del ángulo que se llama **radián**.

En la Fig. 2.5 el centro de la circunferencia está en el vértice del ángulo y su radio es 1. Entonces la medida del arco PQ es la medida en radián del ángulo ∠AOB.

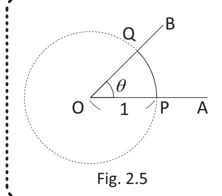
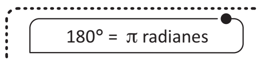


Fig. 2.5

Si la medida del arco PQ es igual a la del radio, entonces ∠AOB es igual a un radián.

Como la medida de la circunferencia de radio 1 es 2π, se tiene que $360° = 2\pi$ radianes.
Dividiendo entre 2 ambos lados, se tiene que



Por lo general se omite "radianes", es decir, cuando no aparece la unidad de medida, se considera que se trata de radianes.

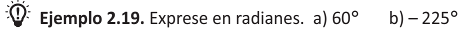
La razón de ser de la unidad de radián consiste en su utilidad en el cálculo infinitesimal que es uno de los temas de Matemática IV. Por lo tanto en este texto sólo se menciona su definición.

De esta relación se deduce que:

$1° = \frac{\pi}{180}$ radián

1 radián $= \frac{180°}{\pi}$

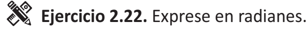
Ejemplo 2.19. Exprese en radianes. a) 60° b) – 225°



Solución: Como $1° = \frac{\pi}{180}$ (radián)

a) $60° = 60\,(1°) = 60\left(\frac{\pi}{180}\right) = \frac{\pi}{3}$

b) $-225° = -225\,(1°) = -225\left(\frac{\pi}{180}\right) = -\frac{5}{4}\pi$ (radianes)



Ejercicio 2.22. Exprese en radianes.

0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°

Ejercicio 2.21
(7 min) Solución

a) El lado izquierdo
$= \text{sen}\theta(-\text{sen}\theta)$
$\quad - \cos\theta\cos\theta$
$= -(\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta)$
$= -1$
= El lado derecho.

b) El lado izquierdo
$\cos\theta\cos\theta$
$\quad - \text{sen}\theta(-\text{sen}\theta)$
$= \cos^2\theta + \text{sen}^2\theta$
$= 1$
= El lado derecho.

[Hasta aquí Clase 9]

[Desde aquí Clase 10]

(10 min)
No es necesario hacer la conversión a minutos y segundos en los grados.



Ejemplo 2.19
(7 min)



Ejercicio 2.22
(8 min) La solución está abajo.

0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π

Clase 10
(Continuación)

Ejemplo 2.20
(5 min)

Ejercicio 2.23
(5 min) Solución

a) $\frac{\pi}{3} = \frac{180°}{3} = 60°$

b) $\frac{\pi}{4} = \frac{180°}{4} = 45°$

c) $-\frac{11\pi}{6} = -\frac{11}{6} \times 180°$
$= -330°$

d) $-3 = -3 \times \frac{180°}{\pi}$
$= -\frac{540°}{\pi}$

Ejemplo 2.21
(5 min)

Ejercicio 2.24
(5 min) Solución

a) $\operatorname{sen}\left(-\frac{7}{6}\pi\right)$
$= \operatorname{sen}(-210°) = \frac{1}{2}$

b) $\cos\left(\frac{5}{3}\pi\right)$
$= \cos 300° = \frac{1}{2}$

c) como $-\frac{9}{4}\pi$
$= -\frac{\pi}{4} - 2\pi$,
$= \tan\left(-\frac{9}{4}\pi\right)$
$= \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$
$= -1$

Ejemplo 2.20. Exprese en grados. a) $\frac{7}{6}\pi$ b) -4

Solución: Como 1 radián = $\frac{180°}{\pi}$

a) $\frac{7}{6}\pi = \frac{7}{6}\pi(1\text{ radián}) = \frac{7}{6}\pi\left(\frac{180°}{\pi}\right) = 210°$

b) $-4 = -4(1\text{ radián}) = -4\left(\frac{180°}{\pi}\right) = -\frac{720°}{\pi}$

$G \times \frac{180°}{\pi}$ para cambiar de radianes a grados.

$G \times \frac{\pi}{180}$ para cambiar de grados a radianes.

Ejercicio 2.23. Exprese en grados. a) $\frac{\pi}{3}$ b) $\frac{\pi}{4}$ c) $-\frac{11}{6}\pi$ d) -3

Ejemplo 2.21. Encuentre los siguientes valores.

a) $\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}$ b) $\cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right)$ c) $\tan\frac{10}{3}\pi$

Solución:

a) $\frac{\pi}{4} = \frac{180°}{\pi} \times \frac{\pi}{4} = 45°$ Por lo tanto $\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \operatorname{sen}45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$

b) $-\frac{5}{6}\pi = \frac{180°}{\pi} \times \left(-\frac{5}{6}\pi\right) = -150°$

Por lo tanto $\cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right) = \cos(-150°) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\frac{10}{3}\pi = \frac{180°}{\pi} \times \frac{10}{3}\pi = 600° = 360° + 240°$

Por lo tanto $\tan\frac{10}{3}\pi = \tan 600° = \tan 240° = \sqrt{3}$

Primero exprese los ángulos en grados.

$\tan(\theta + 360°n) = \tan\theta$ (Clase 2)

Ejercicio 2.24. Encuentre los siguientes valores.

a) $\operatorname{sen}\left(-\frac{7}{6}\pi\right)$ b) $\cos\frac{5}{3}\pi$ c) $\tan\left(-\frac{9}{4}\pi\right)$

70 | Unidad II • Lección 2 • Ejercicios

Objetivo: Fortalecer los conocimientos adquiridos de la lección.

Unidad II. Lección 2.

Ejercicios de la lección

(Continúa en la siguiente página)

Ejercicios de la lección

1. Dibuje los ángulos indicados. No es necesario utilizar el transportador. Clase 1 Ejemplo 2.1
   a) 250° b) – 250° c) 400° d) – 400° e) 1300° f) – 1300°

2. Encuentren los ángulos que corresponden al lado terminal OP. Ejemplo 2.2
   a) 30° b) 150° c) 140° d) 50°

3. ¿A qué cuadrante pertenece los ángulos siguientes? Ejemplo 2.3
   a) b) c) d)

4. ¿A qué cuadrante pertenece los ángulos siguientes? Ejemplo 2.4
   a) 700° b) 3000° c) – 500° d) – 2000°

5. Encuentre los siguientes valores. Utilice la tabla. Clase 3 Ejemplo 2.7
   a) sen400° b) cos(– 230°) c) tan(– 110°)

6. Dado que $\cos\theta = \frac{3}{4}$, encuentre senθ y tanθ. Clase 5 Ejemplo 2.10

*7. a) Dado que sen$\theta = \frac{1}{3}$ y que $90° < \theta < 180°$, encuentre cosθ y tanθ. Clase 5 Ejemplo 2.11

   b) Dado que sen $\theta = \frac{1}{5}$ y θ pertenece al segundo cuadrante, encuentre cosθ y tanθ.

8. Exprese los siguientes valores con las mismas funciones en los ángulos comprendidos entre 0° y 90°. Habrá casos en que se necesita el signo negativo antes de la función. Clase 8 y 9

   a) sen(– 140°) b) cos(– 200°) c) tan(– 290°)

9. a) Exprese en radianes: 1) 510° 2) – 945° Clase 11 Ejemplo 2.19

   b) Exprese en grados: 1) $-\frac{3}{2}\pi$ 2) $\frac{1}{2}$ Ejemplo 2.20

   c) Encuentre los siguientes valores: Ejemplo 2.21
   1) sen $\frac{9}{4}\pi$ 2) $\cos\left(-\frac{13}{6}\pi\right)$ 3) $\tan\left(-\frac{10}{3}\pi\right)$

Unidad II • Lección 2 • Ejercicios | 71

6. $\text{sen}\theta = \pm\sqrt{1-\cos^2\theta} = \pm\frac{\sqrt{7}}{4};\ \tan\theta = \pm\frac{\sqrt{7}}{3}$

7. a) $\cos\theta = -\sqrt{1-\text{sen}^2\theta} = -\frac{2\sqrt{2}}{3};\ \tan\theta = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$

b) $\cos\theta = -\sqrt{1-\text{sen}^2\theta} = -\frac{2\sqrt{6}}{5};\ \tan\theta = -\frac{1}{2\sqrt{6}}$

1.
a) 70° b) 70° c) 40° d) 40° e) 40° f) 40°

2. n: número entero
a) $30° + 360°n$
b) $150° + 360°n$
c) $-140° + 360°n$
d) $-50° + 360°n$

3. a) Cuarto (IV)
b) Tercero (III)
c) Primero (I)
d) Segundo (II)

4.
a) $700° = 360° + 340°$; Cuarto (IV)
b) $3000° = 360°(8) + 120°$; Segundo (II)
c) $-500° = -360° - 140°$; Tercero (III).
d) $-2000° = 360°(-6) + 160°$; Segundo (II).

5.
a) $\text{sen}400° = \text{sen}40° \approx 0.6428$
b) $\cos(-230°) = \cos 230° = -\cos 50° \approx -0.6428$
c) $\tan(-110°) = \tan(-110°+180°) = \tan 70° \approx 2.7475$

8.

a) $\text{sen}(-140°)$
$= -\text{sen}(-140° + 180°)$
$= -\text{sen}40°$

b) $\cos(-200°)$
$= \cos 200°$
$= \cos(180° + 20°)$
$= -\cos 20°$

c) $\tan(-290°)$
$= \tan(-290° + 360°)$
$= \tan 70°$

9.

a) 1) $\frac{\pi}{180°}(510°) = \frac{17\pi}{6}$

2) $\frac{\pi}{180°}(-945°) = -\frac{21}{4}\pi$

b) 1) $-\frac{3}{2}\pi\left(\frac{180°}{\pi}\right) = -270°$

2) $\frac{1}{2}\left(\frac{180°}{\pi}\right) = \frac{90°}{\pi}$

c) 1) $\text{sen}\,\frac{9\pi}{4} = \text{sen}45°$
$= \frac{1}{\sqrt{2}}$

2) $\cos\left(-\frac{13}{6}\pi\right)$
$= \cos(-30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

3) $\tan\left(-\frac{10\pi}{3}\right)$
$= \tan\frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$

[Hasta aquí Ejercicios]

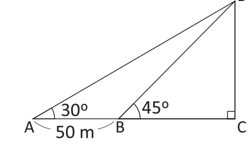
[Desde aquí Problemas de la Unidad A]

Problemas de la Unidad A

1. Sea $0° \leq \theta < 360°$. Encuentre el valor de θ que satisface las siguientes ecuaciones:
   a) $2\text{sen}\theta - 1 = 0$ b) $2\cos\theta + \sqrt{3} = 0$ c) $\sqrt{3}\tan\theta + 1 = 0$

a) Encuentre primero el valor de sen

2. En el punto A, el ángulo de elevación es 30° y en B es de 45°; encuentre la altura de la torre. No se considera la altura de los ojos.



Sea CD = x m y trate de representar tan30° con x.

3. Sea $180° \leq \theta < 360°$ y $\cos\theta = \frac{3}{4}$ Encuentre los valores siguientes:
   a) $\text{sen}\theta$ b) $\tan\theta$ c) $\text{sen}(\theta + 90°)$ d) $\cos(90° - \theta)$
   e) $\tan(\theta + 180°)$ f) $\text{sen}(180° - \theta)$ g) $\cos(-\theta)$

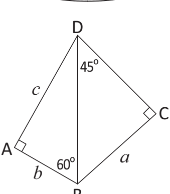
Ejemplo 2.11 y Clase 8 y 9

4. Encuentre el volumen del cono de la figura. El radio de la base mide 10.

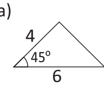
60°

Véase Fig. 1.3

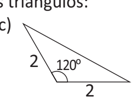
5. Represente los valores de b y c con a.



6. Encuentre el área de los siguientes triángulos:

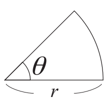
a)


b) 4, 60°, 3

c)


d) 2, 150°, 3

7. Encuentre la longitud l del arco y el área A del sector circular cuyo radio central es θ rádian.



Véase Clase 10

1. a) $\text{sen}\theta = \frac{1}{2}$;
$\theta = 30°, 150°$

b) $\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;
$\theta = 150°, 210°$

c) $\tan\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$;
$\theta = 150°, 330°$

2. Sea CD = x(m); como $\angle$DBC = 45°, BC = CD = x;
en ΔABC, $\tan 30° = \frac{DC}{AC} = \frac{x}{50 + x}$; se sabe que
$\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$

(Continúa en la siguiente página)

Soluciones a Problemas de la Unidad A
(Continuación)

Despejando para x;

$$x\sqrt{3} = 1(50+x) \rightarrow x\sqrt{3} - x = 50$$

$$x(\sqrt{3}-1) = 50$$

$$x = \frac{50}{\sqrt{3}-1} = 25(\sqrt{3}+1)$$

3.

a) Como $180° \leq \theta < 360°$

$\operatorname{sen}\theta < 0$

$$\operatorname{sen}\theta = -\sqrt{1-\cos^2\theta} = -\frac{\sqrt{7}}{4}$$

b) $$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = -\frac{\sqrt{7}}{3}$$

c) $$\operatorname{sen}(90° + \theta) = \cos\theta = \frac{3}{4}$$

d) $$\cos(90° - \theta) = \operatorname{sen}\theta = -\frac{\sqrt{7}}{4}$$

e) $$\tan(\theta + 180°) = \tan\theta = -\frac{\sqrt{7}}{3}$$

f) $$\operatorname{sen}(180° - \theta) = \operatorname{sen}\theta = -\frac{\sqrt{7}}{4}$$

f) $$\cos(-\theta) = \cos\theta = \frac{3}{4}$$

4. Altura: $10\tan 60° = 10\sqrt{3}$

Volumen:

$$= \frac{1}{3}(10^2) \times \pi \times 10\sqrt{3}$$

$$= \frac{1000\sqrt{3}}{3}\pi$$

5. $BD = \sqrt{2}\,a$

$$b = \frac{1}{2}BD = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

$$c = \sqrt{3}\,b = \frac{\sqrt{6}}{2}a$$

6.

	a)	b)	c)	d)
Altura	4sen45°	4sen60°	2sen120° = 2sen60°	2sen150° = 2sen30°
	$2\sqrt{2}$	$2\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	1
Área	$6\sqrt{2}$	$3\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	3/2

Problemas de la Unidad B

1. Sea $0 \leq \theta < 360°$. En cada inciso a), b), c), …, resuelva la ecuación (1) y utilizando su solución, encuentre el valor de θ que satisface la ecuación en (2).
   a) (1) $4x^2 - 3 = 0$ (2) $4\operatorname{sen}^2\theta - 3 = 0$
   b) (1) $3x^2 - 1 = 0$ (2) $3\tan^2\theta - 1 = 0$
   c) (1) $x^2 + x = 0$ (2) $\tan^2\theta + \tan\theta = 0$
   d) (1) $2x^2 + x - 1 = 0$ (2) $2\operatorname{sen}^2\theta + \operatorname{sen}\theta - 1 = 0$

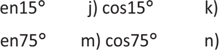
Véase Lec.2 Clase 3 y 4

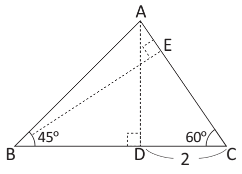
2. En la figura ∠ABC = 45°, ∠ACD = 60°; AD ⊥ BC, BE ⊥ AC y DC = 2. Encuentre los siguientes valores:


a) AD b) AB c) BD d) BC

e) BE f) AC g) EC h) AE

i) sen15° j) cos15° k) tan15°


l) sen75° m) cos75° n) tan75°



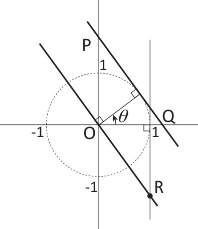
Véase Fig. 1.3

3. Demuestre las siguientes relaciones:

   a) $\cot\theta = \frac{\csc\theta}{\sec\theta}$ b) $\frac{1}{\cot^2\theta} + 1 = \sec^2\theta$

Véase Lec.1 Clase 7 y Lec.2 Clase 6

4. Exprese las coordenadas de los puntos P, Q y R con $\sec\theta$, $\csc\theta$ y $\cot\theta$.



Encuentre la pendiente de la recta PQ (véase Lec.2 Clase 4).

5. Encuentre el valor.

   a) $(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)^2 - 2\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta$

   b) $(1 + \operatorname{sen}\theta - \cos\theta)(1 - \operatorname{sen}\theta + \cos\theta) - 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$

   c) $\frac{1}{\cos(90° - \theta)\operatorname{sen}(180° - \theta)} - \tan^2(270° - \theta)$

   d) $\cos(\theta - 90°)\operatorname{sen}(\theta + 270°) + \operatorname{sen}(\theta + 180°)\cos(180° - \theta)$

Unidad II • Lección 2 • Problemas Unidad B | 73

7. De la definición del radián $l = r\theta$, $\quad A = \pi r^2\left(\frac{\theta}{2\pi}\right) = \frac{1}{2}r^2\theta$

Soluciones a Problemas de la Unidad B

1. a) (1) $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$; (2) sen$\theta = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$; θ = 60°, 120°, 240°, 300°

b) (1) $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$; (2) tan$\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$; θ = 30°, 150°, 210°, 330°

c) (1) x = 0, –1; (2) tanθ = 0, –1; θ = 0°, 135°, 180°, 315°

d) (1) $x = \frac{1}{2}$, –1; (2) sen$\theta = \frac{1}{2}$, –1; θ = 30°, 150°, 270°

2. a) AD = $\sqrt{3}$ DC = $2\sqrt{3}$

b) AB = $\sqrt{2}$ AD = $2\sqrt{6}$

c) BD = AD = $2\sqrt{3}$

d) BC = BD + DC = $2\sqrt{3}$ + 2

e) BE = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ BC = 3 + $\sqrt{3}$

f) AC = 2DC = 4

g) EC = $\frac{1}{2}$BC = $\sqrt{3}$ + 1

h) AE = AC – EC = 3 – $\sqrt{3}$ ∠ABE = 15°; ∠BAC = 75°

i) sen15° = $\frac{AE}{AB} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

j) cos15° = $\frac{BE}{AB} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

k) tan15° = $\frac{AE}{BE} = 2-\sqrt{3}$

l) sen75° = $\frac{BE}{AB} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

m) cos75° = $\frac{AE}{AB} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

n) tan75° = $\frac{BE}{AE}$ = 2 + $\sqrt{3}$

3. a) $\frac{\csc\theta}{\sec\theta} = \frac{\frac{1}{\text{sen}\theta}}{\frac{1}{\cos\theta}} = \frac{\cos\theta}{\text{sen}\theta} = \cot\theta$

b) $\frac{1}{\cot^2\theta} + 1 = \frac{1}{\left(\frac{1}{\tan\theta}\right)^2} + 1 = \frac{1}{\frac{1}{\tan^2\theta}} + 1 = \tan^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta} = \left(\frac{1}{\cos\theta}\right)^2 = \sec^2\theta$

4. La recta PQ, $y = -\cot\theta\, x + \csc\theta$
P (0, cscθ); Q(secθ, 0); R(1, –cotθ)

5. a) $(\text{sen}^2\theta + 2\text{sen}\theta\cos\theta + \cos^2\theta) - 2\cos^2\theta\,\frac{\text{sen}\theta}{\cos\theta} = \text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$

b) $1^2 - (\text{sen}\theta - \cos\theta)^2 - 2\text{sen}\theta\cos\theta = 1 - (1 - 2\text{sen}\theta\cos\theta) - 2\text{sen}\theta\cos\theta = 0$

c) $\frac{1}{\text{sen}\theta\text{sen}\theta} - \tan^2(90° - \theta) = \frac{1}{\text{sen}^2\theta} - \frac{\cos^2\theta}{\text{sen}^2\theta} = \frac{1-\cos^2\theta}{\text{sen}^2\theta} = 1$

d) $\cos(\theta - 90°) = \cos(90° - \theta) = \text{sen}\theta$ y $\text{sen}(\theta + 270°) = -\text{sen}(\theta + 90°) = -\cos\theta$.
Por lo tanto $\text{sen}(-\cos\theta) + (-\text{sen}\theta)(-\cos\theta) = 0$

Tabla de trigonometría

θ	senθ	cosθ	tanθ
0°	0.0000	1.0000	0.0000
1°	0.0175	0.9998	0.0175
2°	0.0349	0.9994	0.0349
3°	0.0523	0.9986	0.0524
4°	0.0698	0.9976	0.0699
5°	0.0872	0.9962	0.0875
6°	0.1045	0.9945	0.1051
7°	0.1219	0.9925	0.1228
8°	0.1392	0.9903	0.1405
9°	0.1564	0.9877	0.1584
10°	0.1736	0.9848	0.1763
11°	0.1908	0.9816	0.1944
12°	0.2079	0.9781	0.2126
13°	0.2250	0.9744	0.2309
14°	0.2419	0.9703	0.2493
15°	0.2588	0.9659	0.2679
16°	0.2756	0.9613	0.2867
17°	0.2924	0.9563	0.3057
18°	0.3090	0.9511	0.3249
19°	0.3256	0.9455	0.3443
20°	0.3420	0.9397	0.3640
21°	0.3584	0.9336	0.3839
22°	0.3746	0.9272	0.4040
23°	0.3907	0.9205	0.4245
24°	0.4067	0.9135	0.4452
25°	0.4226	0.9063	0.4663
26°	0.4384	0.8988	0.4877
27°	0.4540	0.8910	0.5095
28°	0.4695	0.8829	0.5317
29°	0.4848	0.8746	0.5543
30°	0.5000	0.8660	0.5774
31°	0.5150	0.8572	0.6009
32°	0.5299	0.8480	0.6249
33°	0.5446	0.8387	0.6494
34°	0.5592	0.8290	0.6745
35°	0.5736	0.8192	0.7002
36°	0.5878	0.8090	0.7265
37°	0.6018	0.7986	0.7536
38°	0.6157	0.7880	0.7813
39°	0.6293	0.7771	0.8098
40°	0.6428	0.7660	0.8391
41°	0.6561	0.7547	0.8693
42°	0.6691	0.7431	0.9004
43°	0.6820	0.7314	0.9323
44°	0.6947	0.7193	0.9657
45°	0.7071	0.7071	1.0000

θ	senθ	cosθ	tanθ
45°	0.7071	0.7071	1.0000
46°	0.7193	0.6947	1.0355
47°	0.7314	0.6820	1.0724
48°	0.7431	0.6691	1.1106
49°	0.7547	0.6561	1.1504
50°	0.7660	0.6428	1.1918
51°	0.7771	0.6293	1.2349
52°	0.7880	0.6157	1.2799
53°	0.7986	0.6018	1.3270
54°	0.8090	0.5878	1.3764
55°	0.8192	0.5736	1.4281
56°	0.8290	0.5592	1.4826
57°	0.8387	0.5446	1.5399
58°	0.8480	0.5299	1.6003
59°	0.8572	0.5150	1.6643
60°	0.8660	0.5000	1.7321
61°	0.8746	0.4848	1.8040
62°	0.8829	0.4695	1.8807
63°	0.8910	0.4540	1.9626
64°	0.8988	0.4383	2.0503
65°	0.9063	0.4226	2.1445
66°	0.9135	0.4067	2.2460
67°	0.9205	0.3907	2.3559
68°	0.9272	0.3746	2.4751
69°	0.9336	0.3584	2.6051
70°	0.9397	0.3420	2.7475
71°	0.9455	0.3256	2.9042
72°	0.9511	0.3090	3.0777
73°	0.9563	0.2924	3.2709
74°	0.9613	0.2756	3.4874
75°	0.9659	0.2588	3.7321
76°	0.9703	0.2419	4.0108
77°	0.9744	0.2250	4.3315
78°	0.9781	0.2079	4.7046
79°	0.9816	0.1908	5.1446
80°	0.9848	0.1736	5.6713
81°	0.9877	0.1564	6.3138
82°	0.9903	0.1392	7.1154
83°	0.9925	0.1219	8.1443
84°	0.9945	0.1045	9.5144
85°	0.9962	0.0872	11.4301
86°	0.9976	0.0698	14.3007
87°	0.9986	0.0523	19.0811
88°	0.9994	0.0349	28.6363
89°	0.9998	0.0175	57.2900
90°	1.0000	0.0000	



Vectores y matrices

1. Competencias de la Unidad

1. Conceptualizar los vectores en el plano y en el espacio tridimensional.
2. Establecer la forma polar y matricial de los vectores.
3. Construir la proyección escalar de los vectores
4. Calcular la norma de un vector.
5. Sumar y restar vectores con los métodos gráfico y analítico.
6. Realizar el producto de un vector y un escalar y el producto punto.
7. Conceptualizar lo que es una matriz.
8. Realizar operaciones algebraicas con matrices
9. Resolver problemas en los que apliquen vectores y matrices.

2. Relación y Desarrollo

Matemática I

Unidad II: Introducción a la trigonometría.
- Coseno

↓

Matemática I

Unidad III
- Lección 1: Vectores
- Lección 2: Vectores en el espacio
- Lección 3: Matrices

→

Matemática II

Unidad II
- Lección 3: Resolución de triángulos
  - Ley de cosenos

→

Matemática IV

Unidad IV
- Lección 3: Aplicación de derivada
  - Movimiento circular uniforme

↓

Matemática I

Unidad VI: Fundamentos de álgebra
- Lección 1: Funciones de primer grado
  - Sistemas de ecuaciones de primer grado en dos variables

3. Plan de Estudio de la Unidad (25 y *1 horas)

Lección	Clase/hora	Contenidos	Términos y signos
1. Vectores	1	Definición de vector y conceptos básicos	vector, segmento orientado, punto inicial, punto terminal, magnitud, vector unitario, inverso, vector cero, paralelo perpendicular $\overrightarrow{AB}$, $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert$, $-\overrightarrow{AB}$, a, 0, $a \parallel b$, $a \perp b$
	2	Adición y sustracción de vectores	$a + b$, $a - b$
	3	Multiplicación con un número real	ra
	4	Expresión de paralelismo por la multiplicación con un número real	
	5	Componentes de vectores	Forma matricial, e_1, e_2 componente x, (a_1, a_2) componente y
	6	Operaciones en componentes	
	7	Relación entre las coordenadas de los puntos inicial y terminal y los componentes	
	8	Expresión de paralelismo por componentes	
	9	Ángulo entre dos vectores y producto interno	ángulo entre vectores, producto interno $a \cdot b$
	10	Expresión del producto interno por componentes	
	11	Expresión de la condición de perpendicularidad por producto interno	
	12	Cálculo del ángulo entre dos vectores por producto interno	
	*13	Descomposición del vector en dos direcciones	
	14	Expresión de la proyección del vector por producto interno	proyección
	15	Definición de la forma polar y la conversión entre forma polar y matricial	forma polar (l, θ)
		Ejercicios de la lección	

Lección	Clase/hora	Contenidos	Términos y signos
2. Vectores en el espacio	1	Coordenadas en el espacio, la fórmula de distancia	eje z
	2	Definición del vector en el espacio y sus componentes	componente
	3	Definición del producto interno y su expresión por el producto interno.	
		Ejercicios de la lección	
3. Matrices	1	Definición de matrices (Introducción 1)	Arreglo, matriz A(a_{ij}), fila columna, elemento (a_{ij}), tamaño o dimensión ($m \times n$)
	2	Definición de matrices (Introducción 2)	Matriz fila, matriz columna, igualdad A = B
	3	Definición de la adición, matriz nula, matriz opuesta	Matriz nula (A = 0) Matriz opuesta (–A) Adición: A + B
	4	Propiedades de la adición de matrices, sustracción	Sustracción A – B
	5	Multiplicación de un escalar por una matriz	A y B matrices de n x m, k y l escalares
	6	Multiplicación de matrices	A y B matrices, A x B su producto
	7	Matriz inversa	A es una matriz, A^{-1} es su matriz inversa
	8	Matriz inversa (Forma general)	A es una matriz, $\|A\|$ es su determinante

Puntos de lección

Lección 1: Vectores

El texto define el vector como el conjunto de los segmentos orientados con la misma orientación y la misma longitud. Es decir, no se llama vector a cada segmento orientado. Si este concepto es difícil a los estudiantes, se puede cambiar la definición y llamar vector al segmento orientado.

En la primera etapa hay que ejercitar bien a los alumnos dibujando los segmentos orientados.

En la parte donde se trata del producto interno, se utilizan sólo ángulos especiales, por lo tanto no hay necesidad de utilizar la calculadora.

Hacer muchos ejercicios de la conversión entre la forma matricial y la polar no es productivo.

Lección 2: Vectores en el espacio

Se puede tratar los vectores en el espacio igual que los vectores en el plano. Sólo difieren en el hecho de que se necesitan tres componentes en el caso de los vectores en el espacio.
Hay que tratar que los estudiantes entiendan bien el ejemplo de paralelepípedo en la Clase 2.

Lección 3: Matrices

En esta lección se trata de conceptualizar matrices, para lo cual es necesario que se haga énfasis en la formación de una matriz cuando los datos están dados en otros formatos (tablas), asimismo en la identificación del tamaño, ya que es común que los estudiantes confundan la fila con la columna, lo que conduce a errores al identificar elementos en ella.

Al conceptualizar la matriz en este libro se parte de un problema aplicado en donde se pretende que los estudiantes puedan proponer otra forma de presentar los datos dados (Ejemplo 3.1) y éste utilizarlo como un medio para llegar a formar un arreglo rectangular que se le llamará matriz, desde luego una vez que los estudiantes han comprendido qué es y cómo se forma una matriz se debe formalizar el conocimiento (Definición 3.2).

Luego se debe hacer varios ejemplos donde el estudiante elabore matrices dado su tamaño y que identifique las componentes para garantizar que al realizar las operaciones no tendrá dificultades y se disminuirán los errores.

En cuanto a las operaciones con matrices (Clase 3 y 4) es importante conceptualizar la matriz nula, la matriz opuesta y las propiedades que éstas cumplen. En los ejercicios solo se tratan matrices con números enteros, porque lo que se pretende es llegar a la conceptualización, en cursos posteriores de álgebra de matrices podrán hacer operaciones más complejas.

En la multiplicación de matrices, se comienza con el producto de un escalar por una matriz, se plantea encontrar la suma de una misma matriz dos veces para sacar el “dos veces” como un número real que multiplica a la matriz, este número real es el escalar que multiplica a cada uno de los elementos de la matriz. Para la introducción de la multiplicación de matrices se utilizan tablas de doble entrada para deducir el procedimiento. Sabiendo que $A A^{-1} = I$, se forman dos sistemas de ecuaciones lineales de los que se deduce que A^{-1} es la matriz inversa de la matriz A, luego se deduce el determinante de la matriz A para encontrar la matriz inversa en forma general. Solo se trabaja con matrices de orden 2x2 para encontrar su inversa

Unidad III. Lección 1.
Clase 1
(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: Entender la definición de vectores y su presentación por segmento con flecha.

Evaluación: Ejercicio 1.2, 1.3, 1.4, 1.5 y 1.6

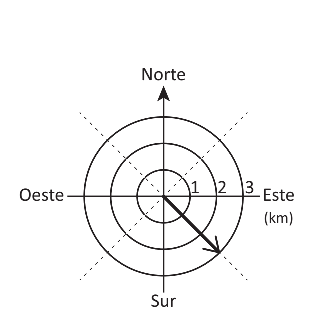
Ejercicio 1.1
(10 min) Solución: B
Los estudiantes dibujan los segmentos con flecha que representan los pasos indicados.

Lección 1. Vectores

Clase 1. Concepto de vector

Ejercicio 1.1. El mapa de abajo indica el lugar de un tesoro. Encuentre el lugar, expresando cada paso con un segmento con flecha (véase el ejemplo de abajo).
Indicación: Sale de la piedra triangular y avanza según lo siguiente:

Paso	Orientación	Distancia (en Km)
1	noreste	2
2	noroeste	3
3	oeste	1
4	norte	3
5	noreste	3
6	este	2
7	norte	3
8	noroeste	3



Ejemplo de segmento con flecha sudoeste 3km.

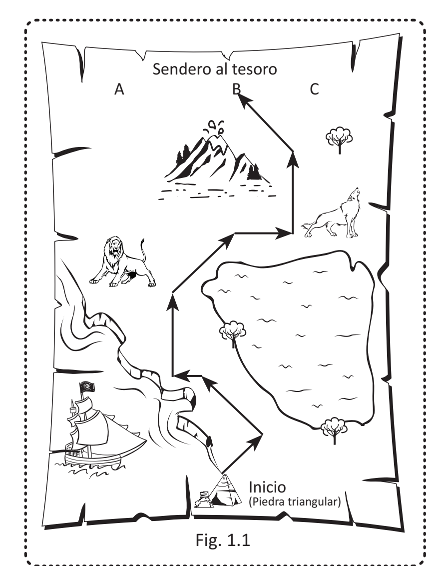


Fig. 1.1

76 | Unidad III • Lección 1 • Clase 1. Concepto de vectores

Clase 1
(Continuación)
(Continúa en la siguiente página)

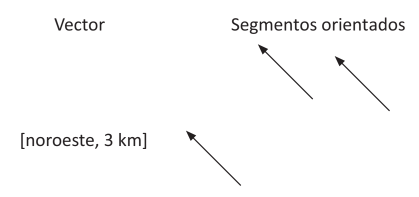
En el Ejercicio 1.1 cada indicación consiste en la pareja de "orientación" y "distancia". A esta pareja se le denomina **vector**.
Correspondiendo a ocho (8) pasos, están colocadas en Fig. 1.1 ocho segmentos con flecha, que se llaman **segmentos orientados**. Estos se utilizan para representar los vectores gráficamente.
A un vector le puede corresponder más de un segmento orientado. Por ejemplo en el Ejercicio 1.1: los pasos 2 y 8 son el mismo vector, por lo tanto los segmentos orientados correspondientes tienen la misma orientación y la misma longitud, pero difieren en la posición. Lo mismo sucede con los pasos 4 y 7.

En resumen, los segmentos orientados con la misma orientación y la misma longitud representan el mismo vector. De esta manera a un vector corresponden un sinnúmero de segmentos orientados que son paralelos con la misma orientación y la misma longitud.

Correspondencia entre vector y segmentos orientados

Vector — Segmentos orientados

[noroeste, 3 km]



El vector representado por el segmento orientado de la Fig. 1.2 se denota mediante $\overrightarrow{AB}$.

Se le denomina a la longitud del segmento AB **magnitud** y se denota $|\overrightarrow{AB}|$.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, si y sólo si las orientaciones coindicen y $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$.

Los símbolos, como ser $\boldsymbol{a}$ se utilizarán también para representar vectores. Si dos vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ no son iguales se denota: $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{b}$.

Punto terminal B

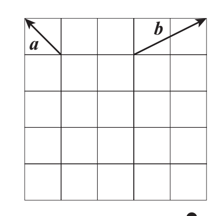
A Punto inicial

Fig. 1.2

En la escritura del vector la flecha es siempre hacia la derecha. ($\overleftarrow{BA}$ es equivocado)

En el cuaderno escriba como $\mathbb{a}$, $\mathbb{b}$.

Ejercicio 1.2. Dibuje tres segmentos orientados que representan vector $\boldsymbol{a}$. Haga lo mismo con vector $\boldsymbol{b}$.

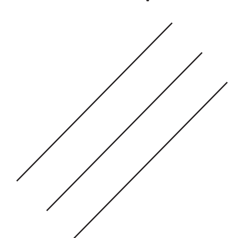


A un vector de magnitud 1, se le llama **vector unitario**.

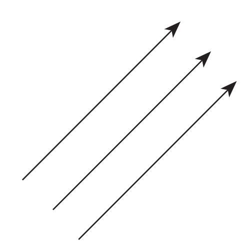
(10 min)

En el texto se define el vector como la combinación de la orientación y la distancisa (magnitud).
Un segmento orientado es una forma de su representación.

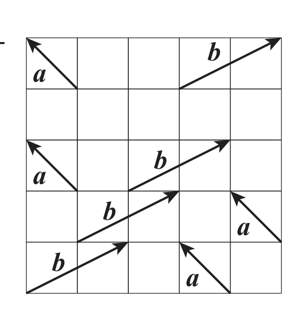
Dirección está representada por el conjunto de rectas paralelas.



Orientación está representada por el conjunto de rayos paralelos con la misma orientación.



Ejercicio 1.2.
(4 min) Solución
(Ejemplo)



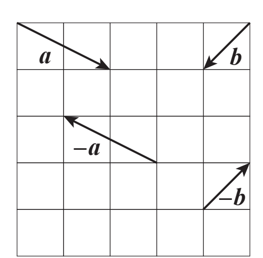
No importa la posición

Clase 1
(Continuación)

 **Ejercicio 1.3.**
(5 min) Solución
a) $\boldsymbol{f}$
b) $|\boldsymbol{c}| = 1$,
$|\boldsymbol{d}| = \sqrt{1^2 + 2^2}$
$= \sqrt{5}$, $|\boldsymbol{i}| = 1$
c) $\boldsymbol{c}, \boldsymbol{g}, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$

Vector inerso
(3 min)

 **Ejercicio 1.4.**
(3 min) Solución
(Ejemplo)



No importa la posición

(5 min)

 **Ejercicio 1.5.**
(5 min) Solución
a) $\boldsymbol{e}$ b) $\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}$
c) $\boldsymbol{c}, \boldsymbol{g}, \boldsymbol{j}$ d) no

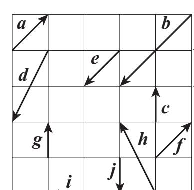
 **Ejercicio 1.6**
(Tarea en casa)
Solución:
a) $\overrightarrow{FO}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{FC}, \overrightarrow{ED}, \overrightarrow{OF}, \overrightarrow{CO}, \overrightarrow{CF}, \overrightarrow{DE}$
b) $\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{EO}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{FA}, \overrightarrow{EB}$

Ejercicio 1.3. En la figura los lados del cuadrado miden uno.

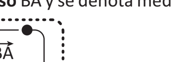
a) Encuentre vectores iguales a $\boldsymbol{a}$.

b) Encuentre magnitud de los vectores $\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{i}$.

c) Encuentre vectores unitarios.

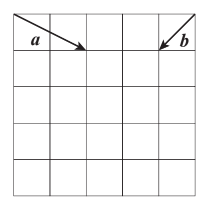


A cada vector $\overrightarrow{AB}$ le corresponde su **inverso** $\overrightarrow{BA}$ y se denota mediante $-\overrightarrow{AB}$, es decir:



Si $\boldsymbol{a}$ es ⟶ ,
$-\boldsymbol{a}$ es ⟵

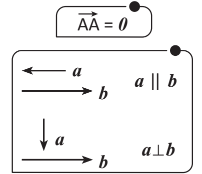
Ejercicio 1.4. Dibuje un segmento orientado que representa $-\boldsymbol{a}$. Haga lo mismo con $-\boldsymbol{b}$.



Se considera $\overrightarrow{AA}$ como un vector y se le llama **vector cero** y se denota por $\boldsymbol{0}$.

$\overrightarrow{AA} = \boldsymbol{0}$

Sean $\overrightarrow{AB} \neq \boldsymbol{0}$ y $\overrightarrow{CD} \neq \boldsymbol{0}$, si $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, se dice que $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son **paralelos** y se denota como $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$. Si $\overline{AB} \perp \overline{CD}$, se dice que $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son **perpendiculares** y se denota $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$.



Ejercicio 1.5. En la figura del Ejercicio 1.3:

a) Encuentre el vector inverso de $\boldsymbol{a}$.

b) Encuentre los vectores paralelos a $\boldsymbol{a}$.

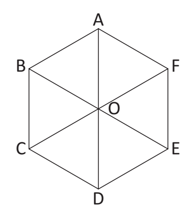
c) Encuentre los vectores perpendiculares a $\boldsymbol{i}$.

d) ¿Los vectores $\boldsymbol{d}$ y $\boldsymbol{h}$ son perpendiculares?

Ejercicio 1.6. La figura es un hexágono regular, encuentre los vectores:

a) Paralelos a $\overrightarrow{AB}$

b) Inversos a $\overrightarrow{CD}$



78 | Unidad III • Lección 1 • Clase 1. Concepto de vectores

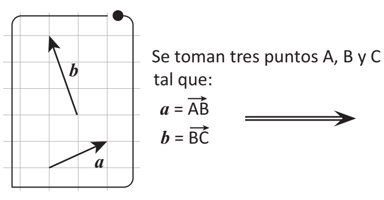
Objetivo: Entender la definición de edición y sustracción.

Evaluación: Ejercicio 1.7, 1.8, 1.9, 1.10 y 1.11

Unidad III. Lección 1.
Clase 2
(Continúa en la siguiente página)

Clase 2. Adición y sustracción de vectores

Adición: Se define la suma de dos vectores como indica el dibujo de la figura 1.3.



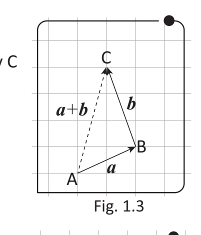
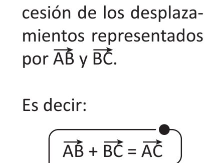
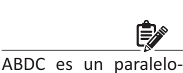


Fig. 1.3

[A]





ABDC es un paralelogramo.

Hay otra representación gráfica de la suma:

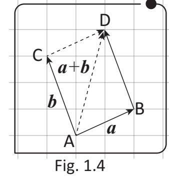


Fig. 1.4



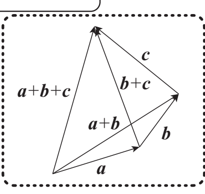
Es idéntica que la de los números

Propiedades de la adición:
1. Conmutatividad $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$
2. Asociatividad $\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c}$
3. $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$
4. $\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = (-\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$

El resultado del inciso 2 se escribe $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$

Demostración: (1) Viene de la Fig. 1.4 .

(2) Viene de la figura de la derecha.



Ejercicio 1.8. Explique 3 y 4.

Ejercicio 1.9. En la figura dibuje los segmentos orientados que representan los siguientes vectores:

$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$; $\boldsymbol{c} + \boldsymbol{a}$

$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} + \boldsymbol{d}$

Unidad III • Lección 1 • Clase 2. Adición y sustracción de vectores | 79

[A]

(10 min)

Fig.1.4 es muy importante.

Ejercicio 1.7
(5 min) Solución
Como $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$ y
AC = BD, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

Propiedad de la adición.
(5 min)

Ejercicio 1.8.
(5 min) Solución:
3. Si $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}$,
$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{0} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB}$
$= \overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}$
$\boldsymbol{0} + \boldsymbol{a} = \overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB}$
$= \overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}$
4) Si $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}$, $-\boldsymbol{a} = \overrightarrow{BA}$,
$\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}$
$= \overrightarrow{AA} = \boldsymbol{0}$
$(-\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{a} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB}$
$= \overrightarrow{BB} = \boldsymbol{0}$

Ejercicio 1.9.
(5 min) Solución en la copia de la página del Libro.

Clase 2
(Continuación)

Sustracción (10 min)

Hay dos formas en la representación gráfica de la sustracción.

Ejercicio 1.10.
(5 min) Solución está en la copia del Libro.

Ejercicio 1.11.
(Tarea en casa)

a) $\overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{AC}$

c) $\overrightarrow{DB}$ d) $\overrightarrow{DB}$

Sustracción.

En el cálculo de los números se tiene que:

$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b})$, donde $-\boldsymbol{b}$ tiene la propiedad
$\boldsymbol{b} + (-\boldsymbol{b}) = (-\boldsymbol{b}) + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$, es decir la relación de $-\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{b}$ es igual a la de $-\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{b}$.
Por consiguiente, se da la siguiente definición:

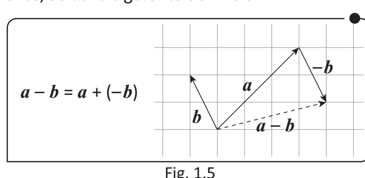


Fig. 1.5

Hay otra representación gráfica de la resta.

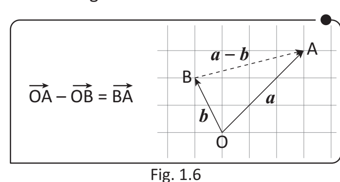


Fig. 1.6

Note que en la Fig. 1.6, $\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}$, por lo tanto, $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ es la solución de la ecuación $\boldsymbol{b} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$

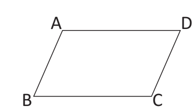
Ejercicio 1.10. En la derecha dibuje los segmentos orientados que representan las siguientes operaciones:

$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$. $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{c}$. $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{d}$. $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{c} - \boldsymbol{b}$

Ejercicio 1.11. En el paralelogramo ABCD, exprese como $\overrightarrow{AB}$ las sumas y restas:

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

c) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$ d) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$



[B]



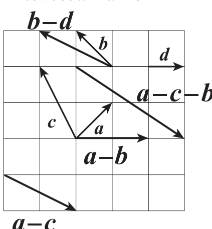
Véase
Propiedad de la adición
4



Compare $\overrightarrow{BA}$ de la Fig. 1.5.



Compare:
Si $b + x = a$
Entonces $x = a - b$



Objetivo: Entender la definición y la propiedad del producto entre vector y número real.

Evaluación: Ejercicio 1.12, 1.13

Unidad III. Lección 1.
Clase 3
(Continúa en la siguiente página)

Clase 3. Multiplicación con un número real

Consideración previa

Si a representa un número, se escribe $a + a = 2a$ y $(-a) + (-a) = -2a$ de lo cual surge la idea de escribir $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{a}$ y $(-\boldsymbol{a}) + (-\boldsymbol{a}) = -2\boldsymbol{a}$.
De la gráfica se sabe que

$|2\boldsymbol{a}| = 2|\boldsymbol{a}|$, $2\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{a}$ tienen la misma orientación

$|-2\boldsymbol{a}| = 2|\boldsymbol{a}|$, $-2\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{a}$ tienen la orientación opuesta.

[A]

$\boldsymbol{a}$

$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}$

$(-\boldsymbol{a}) + (-\boldsymbol{a})$

Está observación induce a la siguiente definición:

Sea $\boldsymbol{a}$ un vector y r un número real. Se define $r\boldsymbol{a}$ como lo siguiente:
Cuando $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ y $r \neq 0$
La magnitud $|r\boldsymbol{a}|$ de $r\boldsymbol{a}$ es $|r|\,|\boldsymbol{a}|$
La orientación de $r\boldsymbol{a}$ y la de $\boldsymbol{a}$ es
La misma si $r > 0$
Opuesta si $r < 0$

El caso contrario
$0\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ para cualquier $\boldsymbol{a}$
$r\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$ para cualquier r

$\boldsymbol{a}$
$r\boldsymbol{a}$ $r > 0$
$r\boldsymbol{a}$ $r < 0$

De esta definición se sabe que:
$1\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$
$(-1)\,\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a}$

Ejercicio 1.12. Dibuje los siguientes vectores:

$2\boldsymbol{a}$, $3\boldsymbol{b}$,
$\frac{3}{2}\boldsymbol{a}$, $-2\boldsymbol{b}$,
$-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$, $\frac{1}{2}\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b}$

$2\boldsymbol{a}$ $-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$ $\boldsymbol{a}$ $-2\boldsymbol{b}$ $\boldsymbol{b}$ $\frac{1}{2}\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b}$ $3\boldsymbol{b}$ $\frac{3}{2}\boldsymbol{a}$

Se utiliza también la notación $\frac{3\boldsymbol{a}}{2}$ para $\frac{3}{2}\boldsymbol{a}$.

Ejemplo 1.1. Sea $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$. Encuentre la magnitud de $\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$.

Solución: $\left|\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}\right| = \left|\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}\right| = \left|\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\right||\boldsymbol{a}| = \frac{1}{|\boldsymbol{a}|}|\boldsymbol{a}| = 1$

$|r\boldsymbol{a}| = |r|\,|\boldsymbol{a}|$

Si $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$, entonces el vector unitario que tiene la misma orientación que $\boldsymbol{a}$ es $\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$

Propiedad del producto con número real.
Sean $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ vectores y k, l números reales.
1. $k\,(l\,\boldsymbol{a}) = (k\,l)\,\boldsymbol{a}$
2. $(k + l)\,\boldsymbol{a} = k\boldsymbol{a} + l\boldsymbol{a}$
3. $k\,(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = k\boldsymbol{a} + k\boldsymbol{b}$

Si $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ fueran números, 1 correspondería la propiedad asociativa de la multiplicación y 2 y 3 a la propiedad distributiva.

La propiedad 1 permite la notación $kl\boldsymbol{a}$ en lugar de $(kl)\boldsymbol{a}$ y $k(l\boldsymbol{a})$.

Unidad III • Lección 1 • Clase 3. Multiplicación con un número real | 81

(10 min)

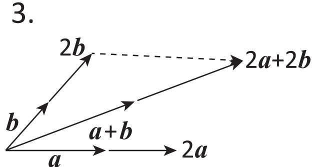
Ejercicio 1.12.
(5 min) Solución está en la copia del Libro.

Ejemplo 1.1
(5 min)

(10 min)

Se puede dar a los estudiantes la tarea de demostrar gráficamente estas propiedades, tomando como ejemplo $k = 2$, $l = 3$

3.



De esta gráfica se sabe que $2(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = 2\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}$

Unidad III. Lección 1.

Clase 3

(Continuación)

Clase 4

Objetivo: Expresar el paralelismo de dos vectores por la igualdad usando la multiplicación con un número real.

Evaluación: Ejercicio 1.14, 1.15

Ejemplo 1.2
(7 min)



Ejercicio 1.13
(5 min) Solución

a) $2\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b}$
b) $-10\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}$
c) $-3\boldsymbol{a} + 4\boldsymbol{b}$
d) $-10\boldsymbol{a} + 17\boldsymbol{b}$
e) $-3\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} - 7\boldsymbol{c}$

[Hasta aquí Clase 3]

[Desde aquí Clase 4]

Ejemplo 1.3
(5 min)

(20 min)

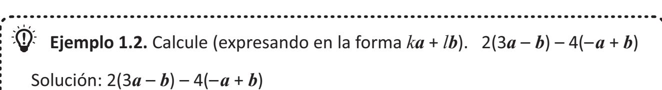
Ejercicio 1.14
(10 min) Solución:

a) $2\boldsymbol{b}$ b) $3\boldsymbol{a}$ c) $-3\boldsymbol{a}$
d) $-2\boldsymbol{a}$ e) $-2\boldsymbol{b}$

Ejercicio 1.15
(10 min) Solución:

$-4\boldsymbol{a} + 6\boldsymbol{b} = -2(2\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b})$
Como $2\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ se tiene que $-2(2\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b}) \neq \boldsymbol{0}$ por lo que se tiene que $(2\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b}) \parallel -2(2\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b})$.

Por estas propiedades se pueden calcular vectores como polinomios de primer grado.



Ejemplo 1.2. Calcule (expresando en la forma $k\boldsymbol{a} + l\boldsymbol{b}$). $2(3\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) - 4(-\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$

Solución: $2(3\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) - 4(-\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$
$= 6\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b} + 4\boldsymbol{a} - 4\boldsymbol{b}$
$= 10\boldsymbol{a} - 6\boldsymbol{b}$

Ejercicio 1.13. Calcule.

a) $3\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} + 5\boldsymbol{b}$
b) $-2(5\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})$
c) $(-\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b}) - (2\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})$
d) $-3(2\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b}) + 4(-\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b})$
e) $2(-3\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}) - 3(-\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{c}) - (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c})$

Clase 4. Paralelismo de vectores

Ejemplo 1.3. Exprese $\boldsymbol{b}$ en términos de $\boldsymbol{a}$ en la figura de la derecha.

2 $\boldsymbol{a}$
4 $\boldsymbol{b}$

Solución: $|\boldsymbol{b}| = 2\,|\boldsymbol{a}|$.
$\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ tienen orientación opuesta.
Por lo tanto, $\boldsymbol{b} = -2\boldsymbol{a}$.

Sean $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ y $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$
$\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b} \iff$ hay un número real k tal que $\boldsymbol{b} = k\boldsymbol{a}$

"$\iff$" Quiere decir "si y sólo si".
A $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ corresponde la única k.

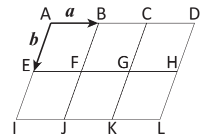
Demostración: Sea $|\boldsymbol{b}| = l|\boldsymbol{a}|$. Si $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$, hay dos casos

a) $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ tienen la misma orientación. En este caso por la definición de la multiplicación se tiene que $\boldsymbol{b} = l\boldsymbol{a}$.
b) $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ tienen orientaciones opuestas. En este caso se tiene que $\boldsymbol{b} = -l\boldsymbol{a}$.

Inversamente, si $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$, $k \neq 0$ y $\boldsymbol{b} = k\,\boldsymbol{a}$, entonces por la definición de la multiplicación con número real, se tiene que $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$.

Ejercicio 1.14. En la figura exprese vectores con $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$.

a) $\overrightarrow{CK}$ b) $\overrightarrow{EH}$ c) $\overrightarrow{LI}$ d) $\overrightarrow{HF}$ e) $\overrightarrow{LD}$



Ejercicio 1.15. Sea $2\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$. Demuestre que:
$-4\boldsymbol{a} + 6\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ y que $(2\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b}) \parallel (-4\boldsymbol{a} + 6\boldsymbol{b})$

82 | Unidad III • Lección 1 • Clase 4. Paralelismo de vectores

Objetivo: Entender la manera de expresar los vectores por sus componentes.

Evaluación: Ejercicio 1.16, 1.17 y 1.18

Unidad III. Lección 1.
Clase 5
(Continúa en la siguiente página)

Clase 5. Componentes de vectores

[A]

Sea $\boldsymbol{e}_1$ (respectivamente $\boldsymbol{e}_2$) un vector unitario cuya orientación es la misma que la del eje x (respectivamente eje y).

Dado un punto A (a_1 a_2), sea A1(a_1, 0) [respectivamente A2(0, a_2)] el pie(base) de la perpendicular hacia el eje x [respectivamente eje y].
Entonces, $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2}$.
Como $\overrightarrow{OA_1} = a_1\,\boldsymbol{e}_1$, $\overrightarrow{OA_2} = a_2\,\boldsymbol{e}_2$,
$\overrightarrow{OA} = a_1\,\boldsymbol{e}_1 + a_2\,\boldsymbol{e}_2$ ... (1)

Fig. 1.7

Inversamente, si $\overrightarrow{OA} = a_1\,\boldsymbol{e}_1 + a_2\,\boldsymbol{e}_2$, entonces las coordenadas de A son (a_1, a_2).
Es decir, los números a_1 y a_2 en (1) se definen únicamente.

En cualquier vector $\boldsymbol{a}$ existe el único punto A que satisface: $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}$. Aplicando lo anteriormente expresado, se tiene que:

> En un vector $\boldsymbol{a}$, existe un único par de números (a_1, a_2) que satisface:
> $$\boldsymbol{a} = a_1\,\boldsymbol{e}_1 + a_2\,\boldsymbol{e}_2$$
> Si $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}$, entonces las coordenadas de A son (a_1, a_2).

En base de esto, se utiliza la siguiente expresión:

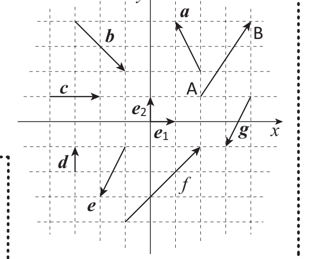
> Si $\boldsymbol{a} = a_1\,\boldsymbol{e}_1 + a_2\,\boldsymbol{e}_2$, se escribe
> $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$ $\quad a_1$ componente x, a_2 componente y.

A la expresión (a_1, a_2) se le llama **Forma Matricial**.

Ejemplo 1.4. En la figura exprese el vector $\overrightarrow{AB}$ en forma matricial.

Solución: $\overrightarrow{AB} = 2\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2$

$= (2, 3)$



Ejercicio 1.16. En la figura anterior, exprese los vectores desde $\boldsymbol{a}$ hasta $\boldsymbol{g}$ en forma matricial.

La forma matricial de $\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{e}_1$ y $\boldsymbol{e}_2$ son:
$\boldsymbol{0} = (0, 0)$, $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0)$ y $\boldsymbol{e}_2 = (0, 1)$

(17 min)



Ejemplo 1.4
(3 min)

Ejercicio 1.16.
(10 min) Solución:
$\boldsymbol{a} = (-1, 2)$
$\boldsymbol{b} = (2, -2)$
$\boldsymbol{c} = (2, 0)$
$\boldsymbol{d} = (0, 1)$
$\boldsymbol{e} = (-1, -2)$
$\boldsymbol{f} = (3, 3)$
$\boldsymbol{g} = (-1, -2)$

Unidad III. Lección 1.

Clase 5
(Continuación)

Clase 6
(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: Entender la manera de operar con componentes.

Evaluación: Ejercicio 1.19, 1.20, 1.21, 1.22

*Ejemplo 1.5



*Ejercicio 1.17
(5 min) Solución

a) $x = -2$, $y = 1$

b) $x = 6$, $y = -3$

Ejemplo 1.6
(5 min)

Ejercicio 1.18
(10 min) Solución.

$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{5}$

$|\boldsymbol{b}| = 2\sqrt{2}$

$|\boldsymbol{c}| = 2$

$|\boldsymbol{d}| = 1$

$|\boldsymbol{e}| = \sqrt{5}$

$|\boldsymbol{f}| = 3\sqrt{2}$

$|\boldsymbol{g}| = \sqrt{5}$

[Hasta aquí Clase 5]

[Desde aquí Clase 6]

(10 min)

***Ejemplo 1.5.** Si dos vectores $(3x, 8)$ y $(-9, 4y)$ son iguales, encuentre los valores de x y y.

Solución: $(3x, 8) = (-9, 4y)$

$3x = -9$

$8 = 4y$

Por lo tanto: $x = -3$, $y = 2$ (Respuesta)

$(a_1, a_2) = (b_1, b_2)$
$a_1 = b_1$
$a_2 = b_2$

***Ejercicio 1.17.** Encuentre los valores de x y y que satisfacen la igualdad:

a) $(2x, 3) = (-4, 3y)$ b) $(3x, -6) = (18, 2y)$

Además, se tiene que:

Si $\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$, entonces $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

Demostración: en la Fig. 1.7, si $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}$, entonces,

$$|\boldsymbol{a}| = |\overrightarrow{OA}| = OA = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

Ejemplo 1.6. En el Ejemplo 1.4, calcule $|\overrightarrow{AB}|$.

Solución: Como $\overrightarrow{AB} = (2, 3)$, se tiene que

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

Ejercicio 1.18. En el ejercicio 1.14, calcule $|\boldsymbol{a}|$ hasta $|\boldsymbol{g}|$

Clase 6. Operaciones en componentes

Sean (a_1, a_2), (b_1, b_2) vectores y k un número real

$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$

$(a_1, a_2) - (b_1, b_2) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$

$k(a_1, a_2) = (ka_1, ka_2)$

[A]

Note que se opera por componente.

Demostración: Como $(a_1, a_2) = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2$, $(b_1, b_2) = b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2$

se tiene que:

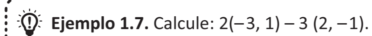
$$\begin{aligned}(a_1, a_2) + (b_1, b_2) &= (a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2) + (b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2)\\ &= (a_1 + b_1)\,\boldsymbol{e}_1 + (a_2 + b_2)\,\boldsymbol{e}_2\\ &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}k(a_1, a_2) &= k(a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2)\\ &= k\,a_1\boldsymbol{e}_1 + k\,a_2\boldsymbol{e}_2\\ &= (ka_1, ka_2)\end{aligned}$$

84 | Unidad III • Lección 1 • Clase 6. Operaciones en componentes

Clase 6
(Continuación)

Ejercicio 1.19. Demuestre la segunda igualdad.



Ejemplo 1.7. Calcule: 2(−3, 1) − 3 (2, −1).

Solución: 2(−3, 1) −3 (2, − 1) = (2 (−3), 2 (1)) − (3 (2), 3 (−1))
= (−6, 2) − (6, −3)
= (−6 − 6, 2 − (−3))
= (−12, 5)

No siempre es necesario escribir el proceso tan detalladamente.

Ejercicio 1.20. Calcule:

a) 4(1, −2) + 2(−3, 5) b) −3(2, −1) + 5(1, −3)

c) 2(−3, 2) − 5(1, −2) d) 4(−1, 1) − 2(3, −2) − (−4, 5)

Ejercicio 1.21. Si $\boldsymbol{a} = (1, -2)$, $\boldsymbol{b} = (-1, 5)$ y $\boldsymbol{x}$ satisfacen la siguiente igualdad, exprese $\boldsymbol{x}$ en la forma matricial.

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{x} = 2(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{x})$$

Primero exprese $\boldsymbol{x}$ con $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$.

Ejemplo 1.8. Encuentre, la forma matricial, del vector unitario que tiene la misma orientación que el vector $\boldsymbol{a} = (-1, 2)$

Solución: $\boldsymbol{b} = \dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$, como $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

$\boldsymbol{b} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\boldsymbol{a} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(-1, 2) = (-\dfrac{1}{\sqrt{5}}, \dfrac{2}{\sqrt{5}})$ (Respuesta)

Véase la Clase 4

Ejercicio 1.22. Encuentre la forma matricial del vector unitario que tiene la misma orientación que $\boldsymbol{a}$.

a) $\boldsymbol{a} = (3, 4)$ b) $\boldsymbol{a} = (-2, 3)$ c) $\boldsymbol{a} = (3, 0)$ d) $\boldsymbol{a} = (0, -4)$

Ejercicio 1.19
(5 min) Solución

$(a_1, a_2) - (b_1, b_2)$
$= (a_1 \boldsymbol{e}_1 + a_2 \boldsymbol{e}_2)$
$\quad - (b_1 \boldsymbol{e}_1 + b_2 \boldsymbol{e}_2)$
$= (a_1 - b_1)\boldsymbol{e}_1 + (a_2 - b_2)\boldsymbol{e}_2$
$= (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$

Ejemplo 1.7.
(5 min)

Ejercicio 1.20
(8 min) Solución

a) (−2, 2)

b) (−1, −12)

c) (−11, 14)

d) (−6, 3)

Ejercicio 1.21
(8 min) Solución

$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{b} - 2\boldsymbol{x}$

$3\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}$

$\boldsymbol{x} = \dfrac{1}{3}(-\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b})$

$= \dfrac{1}{3}(-(1, -2) + 2(-1, 5))$

$= \dfrac{1}{3}(-3, 12) = (-1, 4)$

Ejemplo 1.8
(9 min)

Ejercicio 1.22. (Tarea en casa) Solución:

a) $\dfrac{1}{5}(3, 4) = (\dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5})$ b) $\dfrac{1}{\sqrt{13}}(-2, 3) = (-\dfrac{2}{\sqrt{13}}, \dfrac{3}{\sqrt{13}})$

c) $\dfrac{1}{3}(3, 0) = (1, 0)$ d) $\dfrac{1}{4}(0, -4) = (0, -1)$

Unidad III. Lección 1.
Clase 7
(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: Entender la relación entre las coordenadas de dos puntos y los componentes del vector que los une.

Evaluación: Ejercicio 1.23, 1.24.

(5 min)

Ejemplo 1.9
(5 min)



Ejercicio 1.23.
(10 min) Solución:

a) $\overrightarrow{AB} = (4-3, 1-5)$
$= (1, -4)$
$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2+(-4)^2} = \sqrt{17}$

b) $\overrightarrow{AB} = (5-(-2), -3-4)$
$= (7, -7)$
$|\overrightarrow{AB}| = 7\sqrt{2}$

c) $\overrightarrow{AB} = (1-0, -1-(-2))$
$= (1, 1)$
$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2}$

d) $\overrightarrow{AB} = (0-6, -2-(-1))$
$= (-6, -1)$
$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{37}$

Ejemplo 1.10
(10 min)

Ejercicio 1.24
(10 min) Solución
$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} = (4, -2)$
Sean C(a, b), entonces se tiene que $(a-2, b-4) = (4, -2)$, por lo tanto, $a = 6$, $b = 2$
Respuesta C(6, 2)

Clase 7. Coordenadas y componentes

Sean A(a_1, a_2) y B(b_1, b_2) dos puntos en el plano.
$\overrightarrow{AB} = (b_1-a_1, b_2-a_2)$

Demostración: Como $\overrightarrow{OA} = (a_1, a_2)$ y $\overrightarrow{OB} = (b_1, b_2)$ se tiene que,
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (b_1, b_2) - (a_1, a_2) = (b_1-a_1, b_2-a_2)$

A(a_1, a_1) representa las coordenadas del punto A, $\overrightarrow{OA} = (a_1, a_2)$ representa los componentes del vector $\overrightarrow{OA}$.

Ejemplo 1.9. Sean A(2, −1), B(−3,5). Encuentre los componentes del vector $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BA}$ y sus magnitudes,

Solución:
$\overrightarrow{AB} = ((-3)-2, 5-(-1)) = (-5, 6)$
$\overrightarrow{BA} = (2-(-3), (-1)-5) = (5, -6)$
$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-5)^2+6^2} = \sqrt{61}$, $|\overrightarrow{BA}| = \sqrt{5^2+(-6)^2} = \sqrt{61}$

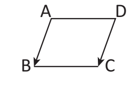
Otra manera es
$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$
$= -(-5, 6)$
$= (5, -6)$
$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}$

Ejercicio 1.23. Encuentre los componentes de $\overrightarrow{AB}$ y $|\overrightarrow{AB}|$ en los siguientes casos.

a) A(3, 5), B(4, 1) b) A(−2, 4), B(5, −3)
c) A(0, −2), B(1, −1) d) A(6, −1), B(0, −2)

Ejemplo 1.10. Los tres vértices de un paralelogramo ABCD son A(2, 3), B(0, −2), y C(5, 0). Encuentre las coordenadas del vértice D.

Solución: Sea D(a, b). La condición de que ABCD es un paralelogramo es $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Como $\overrightarrow{AB} = (0-2, (-2)-3) = (-2, -5)$



$\overrightarrow{DC} = (5-a, 0-b) = (5-a, -b)$, se tiene que $(-2, -5) = (5-a, -b)$
$$\begin{cases} -2 = 5-a \\ -5 = -b \end{cases}$$
Luego $a = 7$, $b = 5$.

D(7, 5) Respuesta.

Ejercicio 1.24. En Ejemplo 1.10, sean A(−3, 5), B(1, 3) y D(2, 4). Encuentre las coordenadas de C.

86 | Unidad III • Lección 1 • Clase 8. Paralelismo y componentes

Objetivo: Entender la manera de expresar el paralelismo con los componentes.

Evaluación: Ejercicio 1.25, 1.26, 1.27

Unidad III. Lección 1.
Clase 8
(Continúa en la siguiente página)

Clase 8. Paralelismo y componentes

Sean $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$. Entonces $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b} \Longleftrightarrow \boldsymbol{b} = k\boldsymbol{a}$ k: número real.

Si $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$ y $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$, se tiene que:

Clase 2 y 4

Sean $(a_1, a_2) \neq (0,0)$ y $(b_1, b_2) \neq (0, 0)$. Entonces $(a_1, a_2) \parallel (b_1, b_2)$
$\Longleftrightarrow$ Hay un número real k tal que: $(b_1, b_2) = k(a_1, a_2)$

Ejemplo 1.11. Determine el valor de x de modo que dos vectores $\boldsymbol{a} = (3, -2)$ y $\boldsymbol{b} = (x, 4)$ sean paralelos.

Solución: $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$ hay un número real k tal que:
$(x, 4) = k(3, -2)$
$(x, 4) = (3k, -2k)$
$\begin{cases} x = 3k \\ 4 = -2k \end{cases}$ Luego $k = -2$, $x = -6$ (Respuesta)

De $4 = -2k$ se tiene $k = -2$

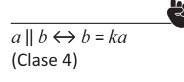
Ejercicio 1.25. Determine el valor de x ó y de modo que $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ sean paralelos.

a) $\boldsymbol{a} = (2, 1)$, $\boldsymbol{b} = (x, -3)$, b) $\boldsymbol{a} = (-1, 1)$, $\boldsymbol{b} = (2, y)$,

c) $\boldsymbol{a} = (x, 4)$, $\boldsymbol{b} = (1, -2)$, d) $\boldsymbol{a} = (4, y)$, $\boldsymbol{b} = (2, -3)$

Ejemplo 1.12. Sean A(−2, 1), B(5, 3), C(−4, 2) y D(x, 6) cuatro puntos. Si $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, encuentre el valor de x.

Solución: $\overrightarrow{AB} = (5-(-2), 3-1) = (7, 2)$ y $\overrightarrow{CD} = (x-(-4), 6-2) = (x+4, 4)$.
$\overline{AB} \parallel \overline{CD} \leftrightarrow \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD} \leftrightarrow$ Existe un número real k tal que:
$(x + 4, 4) = k(7, 2)$. Por lo tanto $(x + 4, 4) = (7k, 2k)$
y se tiene que $4 = 2k$, $k = 2$.
$x + 4 = 7(2) = 14$. Luego $x = 10$. (Respuesta)



$a \parallel b \leftrightarrow b = ka$ (Clase 4)

Ejercicio 1.26. Determine el valor de x o y de modo que $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.

a) A(0, −3), B(4, 2), C(10, 7), D(x, −3)

b) A(10, 1), B(2, 5), C(−3, 4), D(1, y)

c) A(x, 4), B(−7, 1), C(4, 5), D(−2, −1)

d) A(4, 3), B(−5, y), C(4, 0), D(1, 1)

Unidad III • Lección 1 • Clase 8. Paralelismo y componentes | 87

(5min)

Ejemplo 1.11
(5 min)

Ejercicio 1.25
(10 min) Solución

a) $x = -6$ $(\boldsymbol{b} = -3\boldsymbol{a})$
b) $y = -2$ $(\boldsymbol{b} = -2\boldsymbol{a})$
c) $x = -2$ $(\boldsymbol{a} = -2\boldsymbol{b})$
d) $y = -6$ $(\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{b})$

Ejemplo 1.12
(5 min)

Ejercicio 1.26
(10 min) Solución

a) $\overrightarrow{AB} = (4, 5)$,
$\overrightarrow{CD} = (x - 10, -10)$
$x = 2$ $(\overrightarrow{CD} = -2\overrightarrow{AB})$

b) $\overrightarrow{AB} = (-8, 4)$,
$\overrightarrow{CD} = (4, y - 4)$
$y = 2(\overrightarrow{CD} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB})$

c) $\overrightarrow{AB} = (-7 - x, -3)$,
$\overrightarrow{CD} = (-6, -6)$
$x = -4$ $(\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD})$

d) $\overrightarrow{AB} = (-9, y - 3)$,
$\overrightarrow{CD} = (-3,1)$
$y = 6$ $(\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{CD})$

Unidad III. Lección 1.

Clase 8
(Continuación)

Clase 9
(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: Entender la definición y sus primeras propiedades del producto interno.

Evaluación: Ejercicio 1.28

Ejemplo 1.13
(10 min)

Ejercicio 1.27
(Tarea en casa)
Solución:

a) $\pm|\boldsymbol{b}|\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} = \pm\sqrt{5}\,\boldsymbol{a}$

$= \pm(\sqrt{5}, 2\sqrt{5})$

b) $\pm|\boldsymbol{b}|\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} = \pm 2\sqrt{2}\,\boldsymbol{a}$

$= \pm(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$

c) $\pm|\boldsymbol{b}|\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} = \pm\sqrt{13}\,\boldsymbol{a}$

$= \pm(-3\sqrt{13}, 2\sqrt{13})$

d) $\pm|\boldsymbol{b}|\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} = \pm\dfrac{10}{\sqrt{29}}\boldsymbol{a}$

$= \pm(-\dfrac{20}{\sqrt{29}}, \dfrac{50}{\sqrt{29}})$

[Hasta aquí Clase 8]

[Desde aquí Clase 9]

[A]

Ejemplo 1.14
(5 min)

Ejemplo 1.13. Encuentre los vectores $\boldsymbol{b}$ que son paralelos al vector $\boldsymbol{a} = (4, -3)$ y tienen la magnitud 10.

Solución: Como $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b} = k\boldsymbol{a}$ donde k es un número real.

Como $|\boldsymbol{b}| = 10$ y $|\boldsymbol{b}| = |k||\boldsymbol{a}| = |k|\sqrt{4^2+(-3)^2} = 5|k|$

se tiene que $5|k| = 10$, entonces $|k| = 2$, $k = \pm 2$.

Por lo tanto
$\boldsymbol{b} = \pm 2(4, -3) = \pm(8, -6)$ (Respuesta).

$|k\boldsymbol{a}| = |k||\boldsymbol{a}|$
(Clase 3)

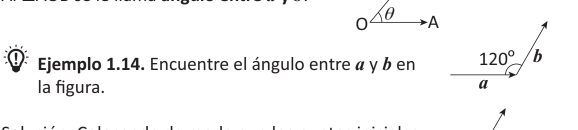
Hay dos vectores que satisfacen la condición. Se puede representar el resultado como
$\pm|\boldsymbol{b}|\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$

Ejercicio 1.27. Encuentre los vectores $\boldsymbol{b}$ que son paralelos al vector $\boldsymbol{a}$ y tienen la magnitud indicada.

a) $\boldsymbol{a} = (1, 2)$, $|\boldsymbol{b}| = 5$
b) $\boldsymbol{a} = (1, 1)$, $|\boldsymbol{b}| = 4$
c) $\boldsymbol{a} = (-3, 2)$, $|\boldsymbol{b}| = 13$
d) $\boldsymbol{a} = (-2, 5)$, $|\boldsymbol{b}| = 10$

Clase 9. Producto interno

Sean $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{OB}$ dos vectores que no son $\boldsymbol{0}$.
Al $\angle AOB$ se le llama **ángulo entre $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$**.



Ejemplo 1.14. Encuentre el ángulo entre $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ en la figura.

Solución: Colocando de modo que los puntos iniciales coincidan, se sabe que el ángulo es 60°.

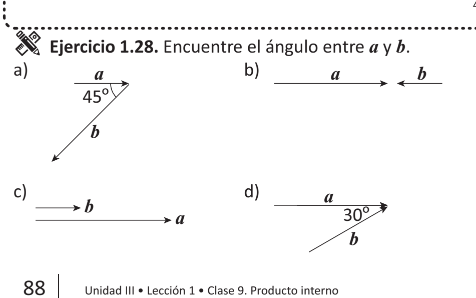
[A]

θ no tiene orientación y $0° \le \theta \le 180°$.

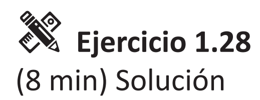
Hay que colocar de modo que los puntos iniciales coincidan.

$\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b} \leftrightarrow \theta = 0°$ ó 180°.
$\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b} \leftrightarrow \theta = 90°$

Ejercicio 1.28. Encuentre el ángulo entre $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$.

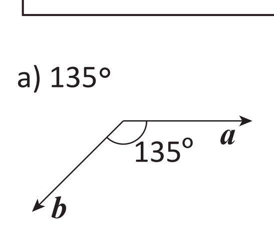


88 | Unidad III • Lección 1 • Clase 9. Producto interno

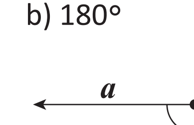


Ejercicio 1.28
(8 min) Solución

a) 135°

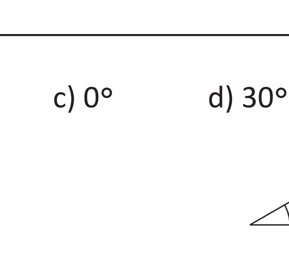


b) 180°



c) 0°

d) 30°

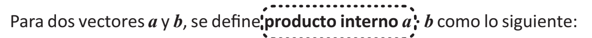


Objetivo: Entender la expresión del producto interno con los componentes.

Evaluación: Ejercicio 1.29, 1.30

Clase 9
(Continuación)

(Continúa en la siguiente página)



Si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, $a \cdot b = |a||b|\cos\theta$, donde θ es el ángulo entre *a* y *b*.
Si $a = 0$ ó $b = 0$, $a \cdot b = 0$

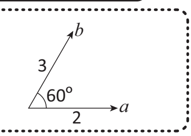
[B]

Se llama también "Producto Punto"

Hay que recordar los siguientes valores.

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

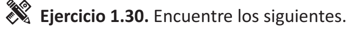
Ejemplo 1.15. Encuentre $a \cdot b$.
Solución: $a \cdot b = 2(3)\cos 60°$
$= 2(3)\frac{1}{2} = 3$ (Respuesta)



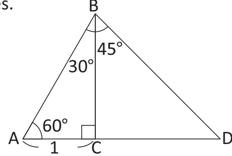
Ejercicio 1.29. En el ejercicio 1.28. encuentre $a \cdot b$ si $|a|$ y $|b|$ tienen los valores siguientes.

a) $|a| = 1$, $|b| = 2$ b) $|a| = 5$, $|b| = 2$
c) $|a| = 3$, $|b| = 1$ d) $|a| = 5$, $|b| = 4$

Encuentre las longitudes de AB, BC, CD, BD.



a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$
b) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CD}$
c) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$
d) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DC}$
e) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD}$



De la tabla de valores de coseno, se tiene que:

Sean $a \neq 0$ y $b \neq 0$ y θ el ángulo entre *a* y *b*.
$0° \leq \theta < 90° \leftrightarrow a \cdot b > 0$
$\theta = 90° \leftrightarrow a \cdot b = 0$
$90° < \theta \leq 180° \leftrightarrow a \cdot b < 0$

Como
$\theta = 90° \leftrightarrow a \perp b$.
$a \perp b \leftrightarrow a \cdot b = 0$

También se tiene lo siguiente.

a) $a \cdot b = b \cdot a$

b) $a \cdot a = |a|^2$

c) $-|a||b| \leq a \cdot b \leq |a||b|$ si $a \neq 0$ y $b \neq 0$ la igualdad se verifica si y solo si $a \parallel b$.

Unidad III • Lección 1 • Clase 10. Producto Interno y componentes | 89

[B]

Definición del producto interno (8 min)

Ejemplo 1.15
(4 min)

Ejercicio 1.29
(10 min) Solución
a) $a \cdot b = 1(2)\cos 135°$
$= -\sqrt{2}$
b) $a \cdot b = 5(2)\cos 180°$
$= -10$
c) $a \cdot b = 3(1)\cos 0° = 3$
d) $a \cdot b = 5(4)\cos 30°$
$= 10\sqrt{3}$

Ejercicio 1.30
(Tarea en casa)
Solución
AB = 2, BC = $\sqrt{3}$ = CD
BD = $\sqrt{6}$
a) $2\sqrt{3}\cos 150° = -3$
b) $2\sqrt{3}\cos 120°$
$= -\sqrt{3}$
c) $1\sqrt{6}\cos 45° = -\sqrt{3}$
d) $1(\sqrt{3})\cos 180°$
$= -\sqrt{3}$
e) $\sqrt{3}(\sqrt{3})\cos 90° = 0$

(10 min)

Unidad III. Lección 1.

Clase 9
(Continuación)

Clase 10
(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: Entender la expresión del producto interno con los componentes.

Evaluación: Ejercicio 1.31, 1.32

La demostración de la ley de los cosenos es el contenido de Matemática II Unidad II.

[Hasta aquí Clase 9]

[Desde aquí Clase 10]

Ejemplo 1.16
(3 min)

Ejercicio 1.31
(8 min) Solución

a) (–3) (1) + 2(–5)
 = –13

b) –1(3) + 0(–2)
 = –3

c) 3(–1) + 1(3)
 = 0

d) 3(0) + 3(0)
 = 0

Demostración:

a) Es evidente.

b) El ángulo entre ***a*** y ***a*** es 0°. Por lo tanto,

$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{a}| \cos\theta = |\boldsymbol{a}|^2$

Como $\dfrac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} = \cos\theta$ y $-1 \leq \cos\theta \leq 1$, se tiene que $-1 \leq \dfrac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} \leq 1$.

Multiplicando por $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$, que es positivo, $-|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \leq \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \leq |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$.

Se verifica la igualdad si y solo si $\cos\theta = \pm 1$, Es decir $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$.



b) y c) son evidentes si $\boldsymbol{a} = 0$ ó $\boldsymbol{b} = 0$.
En la Demostración se supone que: $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ y $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$

$\cos 0° = 1$

$\cos\theta = \pm 1 \leftrightarrow \theta = 0$, $180° \leftrightarrow \boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$.

Clase 10. Producto Interno y componentes

Se puede expresar el producto interno por componentes.

Sean $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$ y $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$. Entonces
$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$

Demostración: Si $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ ó $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$, entonces ambos lados son cero y la igualdad se verifica.

Ahora sean $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA} \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{OB} \neq \boldsymbol{0}$ y θ el ángulo entre ***a*** y ***b***.
Si $0° < \theta < 180°$, entonces los tres puntos O, A y B forman un triángulo y la ley de coseno dice que

$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cdot \cos\theta$

B, A, O, θ

Se aprenderá la ley de coseno en matemática II.

AB^2 representa el cuadrado de la longitud AB.

Esta igualdad también se verifica aun cuando $\theta = 0°$ ó $180°$.
Ahora se escribe la igualdad de arriba con vectores.

$$|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2 - 2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$$

$$(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 = (a_1^2 + a_2^2) + (b_1^2 + b_2^2) - 2\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$$

Luego $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = -\dfrac{1}{2}\{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 - (a_1^2 + a_2^2) - (b_1^2 + b_2^2)\}$
$= a_1 b_1 + a_2 b_2$

$\theta = 0°$

0, A, B

$AB^2 = (OA - OB)^2$
$\cos 0° = 1$
$\theta = 180°$

A, 0, B

$AB^2 = (OA + OB)^2$
$\cos 180° = -1$

Ejemplo 1.16. Encuentre el valor de $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ si $\boldsymbol{a} = (1, -3)$, $\boldsymbol{b} = (2, 4)$.
Solución: $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 1 \cdot 2 + (-3) \cdot 4 = -10$ (Respuesta)

Ejercicio 1.31. Encuentre el valor de $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$.

a) $\boldsymbol{a} = (-3, 2)$, $\boldsymbol{b} = (1, -5)$
b) $\boldsymbol{a} = (-1, 0)$, $\boldsymbol{b} = (3, -2)$
c) $\boldsymbol{a} = (3, 1)$, $\boldsymbol{b} = (-1, 3)$
d) $\boldsymbol{a} = (3, -2)$, $\boldsymbol{b} = (0, 0)$

Objetivo: Entender la equivalencia entre la perpendicularidad y la nulidad del producto interno.

Evaluación: Ejercicio 1.33, 1.34, 1.35, 1.36

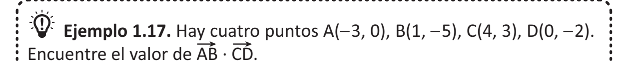
Unidad III. Lección 1.

Clase 10

(Continuación)

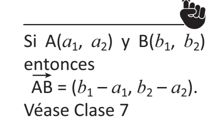
Clase 11

(Continúa en la siguiente página)



Ejemplo 1.17. Hay cuatro puntos A(–3, 0), B(1, –5), C(4, 3), D(0, –2). Encuentre el valor de $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$.

Solución: $\overrightarrow{AB}$ = (1–(–3), –5 –0) = (4, –5)
y $\overrightarrow{CD}$ = (0–4, –2–3) = (–4, –5). Por lo tanto
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$ = 4 · (–4) + (–5)(–5) = 9 (Respuesta)



Si A(a_1, a_2) y B(b_1, b_2) entonces
$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$.
Véase Clase 7

Ejercicio 1.32. Encuentre el valor de $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$.

a) A(1, –2), B(3, 4), C(2, –1), D(3, 0)

b) A(–5, 1), B(0, –2), C(1, –3), D(1, 4)

c) A(2, 0), B(–3, 1), C(–4, –1), D(0, 0)

Clase 11. Perpendicularidad y producto interno

Ejemplo 1.18. Encuentre las parejas de $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ donde $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$.

a) $\boldsymbol{a}$ = (3, 2), $\boldsymbol{b}$ = (–1, 1) b) $\boldsymbol{a}$ = (1, –1), $\boldsymbol{b}$ = (1, 1)
c) $\boldsymbol{a}$ = (3, 0), $\boldsymbol{b}$ = (0, –1) d) $\boldsymbol{a}$ = (–2, 1), $\boldsymbol{b}$ = (1, –2)

Solución: En a) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ = 3(–1) + 2(1) = –1 ≠ 0.
En b) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ = 1(1) + (–1)(1) = 0 y $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ y $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$.
En c) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ = 3(0) + 0(–1) = 0 y $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ y $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$.
En d) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ = (–2)(1) + 1(–2) = –4 ≠ 0

Por lo tanto, en (b) y (c) $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$ (Respuesta)

$\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b} \leftrightarrow \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$ donde $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$
Véase Clase 1.9



Ejercicio 1.33. Encuentre las parejas de a y b donde $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$.

a) $\boldsymbol{a}$ = (4, –2) $\boldsymbol{b}$ = (1, 2) b) $\boldsymbol{a}$ = (3, –2) $\boldsymbol{b}$ = (–2, 3)

c) $\boldsymbol{a}$ = (–2, 1) $\boldsymbol{b}$ = (4, –2) d) $\boldsymbol{a}$ = (3, 0) $\boldsymbol{b}$ = (1, 1)

Ejemplo 1.19. Sean $\boldsymbol{a}$ = (2,3) $\boldsymbol{b}$ = (x, 6). Encuentre el valor de x tal que $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$.
Solución: $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 2(x) + 3(6) = 2x + 18$. Como $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b} \leftrightarrow \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$ se tiene que $2x + 18 = 0$. Por lo tanto $x = -9$. (Respuesta)

Ejercicio 1.34. Encuentre el valor de x tal que $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$.

a) $\boldsymbol{a}$ = (–1,2) $\boldsymbol{b}$ = (x, 3) b) $\boldsymbol{a}$ = (x, 4) $\boldsymbol{b}$ = (2, 3)

c) $\boldsymbol{a}$ = (3, x) $\boldsymbol{b}$ = (5, –6) d) $\boldsymbol{a}$ = (–2, x) $\boldsymbol{b}$ = (2, –3)

Unidad III • Lección 1 • Clase 11. Perpendicularidad y producto interno | 91

Ejemplo 1.17
(6 min)

Ejercicio 1.32
(8 min) Solución

a) $\overrightarrow{AB}$ = (2, 6), $\overrightarrow{CD}$ = (1, 1)
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$ = 8

b) $\overrightarrow{AB}$ = (5, –3), $\overrightarrow{CD}$ = (0,7)
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$ = –21

c) $\overrightarrow{AB}$ = (–5, 1), $\overrightarrow{CD}$ = (4, 1)
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$ = –19

[Hasta aquí Clase 10]

[Desde aquí Clase 11]

Ejemplo 1.18
(9 min)

Ejercicio 1.33
(8 min) Solución

a) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ = 0, $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$

b) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ = –12 , No

c) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ = –10, No

d) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ = 3, No

Ejemplo 1.19
(8 min)

Ejercicio 1.34. (10 min) Solución

a) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = -x + 6 = 0$, $x = 6$

b) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 2x + 12 = 0$, $x = -6$

c) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 15 - 6x = 0$, $x = \frac{5}{2}$

d) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = -4 - 3x = 0$, $x = -\frac{4}{3}$

Unidad III. Lección 1.

Clase 11
(Continuación)

Clase 12
(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: Calcular el ángulo entre dos vectores usando el producto interno.

Evaluación: Ejercicio 1.37, 1.38

Ejercicio 1.35

(10 min) Solución

a) $\overrightarrow{AB} = (-1, 5)$,
$\overrightarrow{CD} = (x-1, -5)$
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -(x-1)$
$-25 = 0$, $x = -24$

b) $\overrightarrow{AB} = (-1, -x-1)$,
$\overrightarrow{CD} = (2x+3, -3)$
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -(2x+3) +$
$3(x+1) = 0$
$x = 0$

* Ejemplo 1.20

*Ejercicio 1.36.

Solución. Sea $\boldsymbol{u} = (x, y)$

a) $x - 2y = 0$, $x^2 + y^2 = 1$
$\boldsymbol{u} = \pm\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

b) $4x + 3y = 0$, $x^2 + y^2 = 1$
$\boldsymbol{u} = \pm\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$

c) $3x + 2y = 0$, $x^2 + y^2 = 1$
$\boldsymbol{u} = \pm\left(\frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{3}{\sqrt{13}}\right)$

d) $3x = 0$, $x^2 + y^2 = 1$
$\boldsymbol{u} = \pm(0, 1)$

[Hasta aquí Clase 11]

[Desde aquí Clase 12]

Ejemplo 1.21

(5 min)

Ejercicio 1.35. Encuentre el valor de x de modo que $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$.

a) A(3, −1), B(2, 4), C(1, 5), D(x, 0)

b) A(2, x), B(1, −1), C(−3, 1), D(2x, -2)

***Ejemplo 1.20.** Encuentre vector unitario $\boldsymbol{u}$ que es perpendicular a $\boldsymbol{a} = (3, -4)$.

Solución: Sea $\boldsymbol{u} = (x, y)$.

$\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{u} \leftrightarrow \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{u} = 0 \leftrightarrow 3x - 4y = 0$ .... (1)

$|\boldsymbol{u}| = 1 \leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$ .... (2)

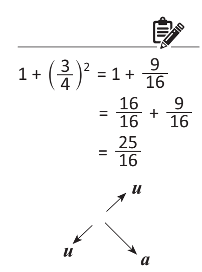
De (1) se tiene que $y = \frac{3}{4}x$ .... (3)

Sustituyendo (3) en (2), se tiene que

$x^2 + \left(\frac{3}{4}x\right)^2 = 1$ $\quad \frac{25}{16}x^2 = 1$ $\quad x^2 = \frac{16}{25}$

$x = \pm\sqrt{\frac{16}{25}} = \pm\frac{4}{5}$ Sustituyendo en (3), se tiene que

$y = \frac{3}{4} \cdot \left(\pm\frac{4}{5}\right) = \pm\frac{3}{5}$. Por lo tanto $\boldsymbol{u} = \pm\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$. (Respuesta)



$1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1 + \frac{9}{16}$
$= \frac{16}{16} + \frac{9}{16}$
$= \frac{25}{16}$

Generalmente si $\boldsymbol{a} = (a, b)$, entonces

$\boldsymbol{u} = \pm\frac{(b, -a)}{|\boldsymbol{a}|}$

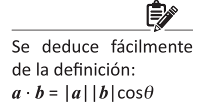
***Ejercicio 1.36.** Encuentre el vector unitario $\boldsymbol{u}$ que es perpendicular a $\boldsymbol{a}$.

a) $\boldsymbol{a} = (1, -2)$ b) $\boldsymbol{a} = (4, 3)$ c) $\boldsymbol{a} = (3, 2)$ d) $\boldsymbol{a} = (3, 0)$

Clase 12. El ángulo formado por dos vectores

Sean $\boldsymbol{a} \neq 0$ y $\boldsymbol{b} \neq 0$. Sea θ el ángulo formado por $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$.

Entonces $\cos\theta = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$



Se deduce fácilmente de la definición:
$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$

Ejemplo 1.21. Sean $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ dos vectores donde $|\boldsymbol{a}| = 2$, $|\boldsymbol{b}| = 3$ y $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = -3$. Encuentre el ángulo θ entre $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ ($0° \leq \theta \leq 180°$).

Solución:

$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} = \frac{-3}{2(3)} = -\frac{1}{2}$. Como $0° \leq \theta \leq 180°$,

se tiene que $\theta = 120°$. (Respuesta)

Véase la tabla de Clase 9

92 | Unidad III • Lección 1 • Clase 12. El ángulo formado por dos vectores

Ejercicio 1.37. Encuentre el ángulo θ entre $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ ($0° \leq \theta \leq 180°$).

a) $|\boldsymbol{a}| = 3, |\boldsymbol{b}| = 10, \quad \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 15$

b) $|\boldsymbol{a}| = 4, |\boldsymbol{b}| = 3, \quad \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 6\sqrt{2}$

c) $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{3}, |\boldsymbol{b}| = 2, \quad \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = -3$

d) $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{2}, |\boldsymbol{b}| = \sqrt{2}, \quad \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = -2$

Ejemplo 1.22. Sean $\boldsymbol{a} = (1, 3)$ y $\boldsymbol{b} = (2, 1)$.
Encuentre el ángulo θ entre $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ ($0° \leq \theta \leq 180°$).

Solución: $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$ $\quad |\boldsymbol{b}| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 1(2) + 3(1) = 5$

$\cos\theta = \dfrac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} = \dfrac{5}{\sqrt{10}\sqrt{5}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ como $0° \leq \theta \leq 180°$,

$\theta = 45°$ (Respuesta)

Ejercicio 1.38. Encuentre el ángulo θ entre $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ ($0° \leq \theta \leq 180°$).

a) $\boldsymbol{a} = (2, -1), \boldsymbol{b} = (-1, 3)$

b) $\boldsymbol{a} = (1, \sqrt{3}), \boldsymbol{b} = (-\sqrt{3}, 3)$

c) $\boldsymbol{a} = (1, \sqrt{3}), \boldsymbol{b} = (\sqrt{3}, 1)$

d) $\boldsymbol{a} = (1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3})$,
$\boldsymbol{b} = (1 + \sqrt{3}, 1 - \sqrt{3})$

e) $\boldsymbol{a} = (2\sqrt{3} + 1, 2 - \sqrt{3}), \boldsymbol{b} = (-2, 1)$

Unidad III • Lección 1 • Clase 13. Descomposición de vectores | 93

Ejercicio 1.37
(10 min) Solución

a) $\cos\theta = \dfrac{1}{2}, \quad \theta = 60°$

b) $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \quad \theta = 45°$

c) $\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \theta = 150°$

d) $\cos\theta = -1, \quad \theta = 180°$

Ejemplo 1.22
(10 min)

Ejercicio 1.38
(15 min) Solución

a) $\cos\theta = \dfrac{-5}{\sqrt{5}\sqrt{10}}$

$= -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\theta = 135°$

b) $\cos\theta = \dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{4}\sqrt{12}} = \dfrac{1}{2}$

$\theta = 60°$

c) $\cos\theta = \dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{4}\sqrt{4}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\theta = 30°$

d) $\cos\theta = \dfrac{-4}{\sqrt{8}\sqrt{8}} = -\dfrac{1}{2}$

$\theta = 120°$

e) $\cos\theta = \dfrac{-5\sqrt{3}}{\sqrt{20}\sqrt{5}}$

$= -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\theta = 150°$

Unidad III. Lección 1.
* Clase 13
(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: Expresar vectores como combinaciones lineales de dos vectores linealmente independientes.

Evaluación: Ejercicio 1.39, 1.40

(12 min)

Ejemplo 1.23
(8 min)

Ejercicio 1.39
(10 min) Solución
Sea $\boldsymbol{p} = s\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}$

a) $(3s + 5t, s + 2t) = (4, 3)$
$s = -7$, $t = 5$
$\boldsymbol{p} = -7\boldsymbol{a} + 5\boldsymbol{b}$

b) $(4s - 3t, s - t) = (-5, 0)$
$s = -5 = t$
$\boldsymbol{p} = -5\boldsymbol{a} - 5\boldsymbol{b}$

c) $(-2s + t, s - t) = (8, -3)$
$s = -5$, $t = -2$
$\boldsymbol{p} = -5\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b}$

(10min)

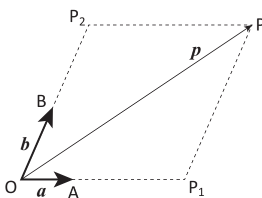
Ejemplo 1.24
(5 min)

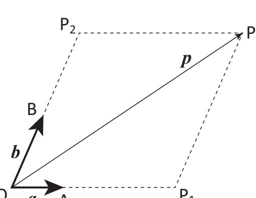
*Clase 13. Descomposición de vectores

Sean $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ y $\boldsymbol{a} \nparallel \boldsymbol{b}$. Entonces a cualquier vector $\boldsymbol{p}$, existen único par de números s y t tal que $\boldsymbol{p} = s\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}$.

Demostración. En la figura

$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{OB}$, $\boldsymbol{p} = \overrightarrow{OP}$, $\overline{PP_1} \parallel \overline{OB}$, $\overline{PP_2} \parallel \overline{OA}$, $\overrightarrow{OP_1} = s\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OP_2} = t\boldsymbol{b}$.
Entonces
$\boldsymbol{p} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2}$
$= s\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}$





$\boldsymbol{a} \nparallel \boldsymbol{b}$ quiere decir $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ no son paralelas.

La expresión $\boldsymbol{a} = a_1 \boldsymbol{e}_1 + a_2 \boldsymbol{e}_2$ es un caso especial (Clase 5)

Cuando dos vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ satisfacen la condición, se dice que $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son **linealmente independientes**.

Ejemplo 1.23. Exprese $\boldsymbol{p} = (-4, 1)$ con $\boldsymbol{a} = (2, -1)$ y $\boldsymbol{b} = (-3, 2)$.

Solución: Sea $\boldsymbol{p} = s\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}$. Entonces $(-4, 1) = s(2, -1) + t(-3, 2)$
$= (2s - 3t, -s + 2t)$.
Por lo tanto

$$\begin{cases} 2s - 3t = -4 \\ -s + 2t = 1 \end{cases} \quad s = -5,\ t = -2$$

$\boldsymbol{p} = -5\boldsymbol{a} \ -2\boldsymbol{b}$ (Respuesta)

La forma $s\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}$ se llama **combinación lineal** de $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$.

Ejercicio 1.39. Exprese $\boldsymbol{p}$ con $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$.
a) $\boldsymbol{p} = (4, 3)$, $\boldsymbol{a} = (3, 1)$, $\boldsymbol{b} = (5, 2)$
b) $\boldsymbol{p} = (-5, 0)$, $\boldsymbol{a} = (4, 1)$, $\boldsymbol{b} = (-3, -1)$
c) $\boldsymbol{p} = (8, -3)$, $\boldsymbol{a} = (-2, 1)$, $\boldsymbol{b} = (1, -1)$

Sean $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ y $\boldsymbol{a} \nparallel \boldsymbol{b}$.
Entonces $s\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b} = s'\boldsymbol{a} + t'\boldsymbol{b}$ si y sólo si $s = s'$, $t = t'$.

Ejemplo.1.24. Sean $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ y $\boldsymbol{a} \nparallel \boldsymbol{b}$.Encuentre los valores de s y t que satisfacen $(2s - 1)\boldsymbol{a} + (3s + 2)\boldsymbol{b} = (t + 1)\boldsymbol{a} + (2t - 1)\boldsymbol{b}$.

Solución: Igualando los coeficientes de ambos lados, se tiene que:

$$\begin{cases} 2s - 1 = t + 1 \\ 3s + 2 = 2t - 1 \end{cases} \quad \text{por lo tanto } s = 7,\ t = 12$$

94 | Unidad III • Lección 1 • Clase 13. Descomposición de vectores

Objetivo: Dibujar y evaluar la proyección de un vector sobre el otro.

Evaluación: Ejercicio 1.41, 1.42, 1.43

Unidad III. Lección 1.

Clase 13
(Continuación)

Clase 14
(Continúa en la siguiente página)

Ejercicio 1.40. Sean $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ y $\boldsymbol{a} \nparallel \boldsymbol{b}$. Encuentre los valores de s y t que satisfacen las siguientes relaciones:

a) $(s + 3)\,\boldsymbol{a} + (-s + 1)\boldsymbol{b} = (-2t + 1)\,\boldsymbol{a} + (t + 2)\boldsymbol{b}$.

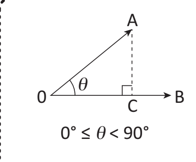
b) $(3s + 1)\,\boldsymbol{a} + (2s - 1)\boldsymbol{b} = (t - 2)\,\boldsymbol{a} + (t + 1)\boldsymbol{b}$.

c) $(2 - s)\,\boldsymbol{a} + 2s\boldsymbol{b} = (2t - 1)\,\boldsymbol{a} - t\boldsymbol{b}$.

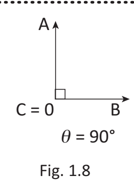
Clase 14. Proyección

Definición de la proyección. **[A]**

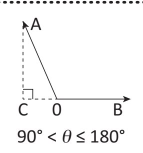
Sean $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}$ y $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{OB}$ dos vectores diferentes de $\boldsymbol{0}$ y sea θ el ángulo entre $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$. Se distingue tres casos.



$0° \leq \theta < 90°$



$\theta = 90°$



$90° < \theta \leq 180°$

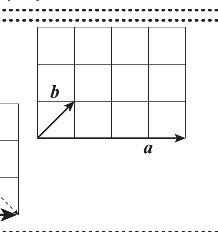
Fig. 1.8

En la Fig.1.8 al vector $\overrightarrow{OC}$ se le denomina la **proyección** de $\boldsymbol{a}$ sobre $\boldsymbol{b}$.

C es el pie (base) de la perpendicular desde A a $\overline{OB}$.

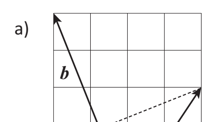
La proyección debe formar un ángulo recto.

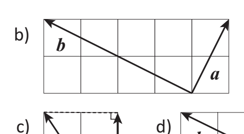
Ejemplo 1.25. Dibuje la proyección de $\boldsymbol{a}$ sobre $\boldsymbol{b}$.

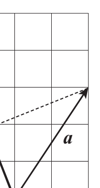


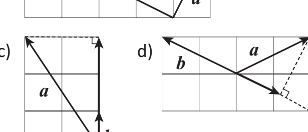
Solución
$\boldsymbol{c}$ es la proyección.

Ejercicio 1.41. Dibuje la proyección de $\boldsymbol{a}$ sobre $\boldsymbol{b}$.

a)


b)


c)


d)


Ejercicio 1.40
(Tarea en casa) Solución

a) $\begin{cases} s + 3 = -2t + 1 \\ -s + 1 = t + 2 \end{cases}$

$\begin{cases} s = 0 \\ t = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3s + 1 = t - 2 \\ 2s - 1 = t + 1 \end{cases}$

$\begin{cases} s = -5 \\ t = -12 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2 - s = 2t - 1 \\ 2s = -t \end{cases}$

$\begin{cases} s = -1 \\ t = 2 \end{cases}$

[Hasta aquí Clase 13]

[Desde aquí Clase 14]

[A]

(6 min)

Ejemplo 1.25
(4 min)

Ejercicio 1.41
(6 min)

Clase 14
(Continuación)

[B]

(15 min)

Ejemplo 1.26
(8 min)

Ejercicio 1.42
(6 min)

$\boldsymbol{a} = (4, 0)$, $\boldsymbol{b} = (1,1)$

$Proy = \frac{4(1)+0(1)}{1^2+1^2}(1,1)$

$= (2, 2)$

Ejercicio 1.43
(Tarea en casa)

a) $-\frac{5}{5}(-2, 1) = (2, -1)$

b) $\frac{0}{20}(-4, 2) = (0, 0)$

c) $\frac{3}{1}(0, 1) = (0, 3)$

d) $\frac{1}{5}(1, 2) = (\frac{1}{5}, \frac{2}{5})$

Expresión de la proyección.

[B]

En la Fig. 1.8, $\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$ es el vector unitario que tiene la misma orientación que $\boldsymbol{b}$.

En el caso $0° \leq \theta < 90°$, $|\overrightarrow{OC}| = |\boldsymbol{a}| \cos\theta$ y la orientación de $\overrightarrow{OC}$ coincide con la de $\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$, por lo tanto:

$\overrightarrow{OC} = |\boldsymbol{a}| \cos\theta \frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$. Como $\cos\theta = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$ se tiene que:

$\overrightarrow{OC} = |\boldsymbol{a}|\left(\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}\right)\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|} = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|^2}\boldsymbol{b}$ . . . (1)

En el caso $\theta = 90°$, $\overrightarrow{OC} = \boldsymbol{0}$. Por otra parte $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 0$.
Por lo tanto, la fórmula (1) se verifica también en este caso.

En el caso $90° < \theta \leq 180°$, $\cos\theta < 0$ y

$|\overrightarrow{OC}| = ||\boldsymbol{a}|\cos\theta| = |\boldsymbol{a}|(-\cos\theta) = -|\boldsymbol{a}|\cos\theta.$

La orientación de $\overrightarrow{OC}$ es opuesta a la de $\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$.

Por lo tanto $\overrightarrow{OC} = -|\boldsymbol{a}|\cos\theta\left(-\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}\right) = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|^2}\boldsymbol{b}$ y se verifica (1) en este caso también.

$-\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$ tiene la orientación opuesta a $\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$.

En resumen

Sean $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ dos vectores diferentes de $\boldsymbol{0}$.
La proyección de $\boldsymbol{a}$ sobre $\boldsymbol{b}$ es $\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|^2}\boldsymbol{b}$.

Ejemplo 1.26. Sean $\boldsymbol{a} = (2, 5)$, $\boldsymbol{b} = (3, 1)$. Encuentre la proyección de $\boldsymbol{a}$ sobre $\boldsymbol{b}$.

Solución: La proyección es:

$$\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|^2}\boldsymbol{b} = \frac{2(3)+5(1)}{3^2+1^2}(3, 1) = \frac{11}{10}(3, 1) = \left(\frac{33}{10}, \frac{11}{10}\right)$$

Ejercicio 1.42. En el Ejemplo 1.25 los lados de los cuadrados miden 1. Encuentre los componentes de $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ y calcule la proyección de $\boldsymbol{a}$ sobre $\boldsymbol{b}$.

Ejercicio 1.43. Encuentre la proyección de $\boldsymbol{a}$ sobre $\boldsymbol{b}$.

a) $\boldsymbol{a} = (2, -1)$, $\boldsymbol{b} = (-2, 1)$ b) $\boldsymbol{a} = (1, 2)$, $\boldsymbol{b} = (-4, 2)$
c) $\boldsymbol{a} = (-2, 3)$, $\boldsymbol{b} = (0, 1)$ d) $\boldsymbol{a} = (3, -1)$, $\boldsymbol{b} = (1, 2)$

96 | Unidad III • Lección 1 • Clase 14. Forma matricial y forma polar

Objetivo: Entender la forma polar y su relación con la forma matricial.

Evaluación: Ejercicio 1.44, 1.45, 1.46, 1.47

Unidad III. Lección 1.

Clase 15

(Continúa en la siguiente página)

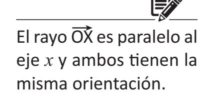
Clase 15. Forma matricial y forma polar

Hasta ahora se ha venido utilizando los componentes para expresar los vectores numéricamente. A esta forma se le llama **forma matricial**.
Hay otra forma que se llama **forma polar** que corresponde a la expresión del Ejercicio 1.1.

[A]

Forma polar

OA = (ℓ, θ) ℓ : magnitud
θ : argumento

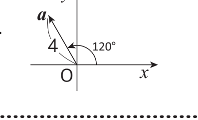


El rayo $\overrightarrow{OX}$ es paralelo al eje x y ambos tienen la misma orientación.

Nota: No se puede determinar el argumento únicamente. Si θ corresponde al $\overrightarrow{OA}$, todos los argumentos tienen la forma $\theta + 360° n$ (n: número entero).

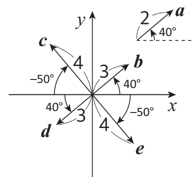
Véase Unidad II, Lección II, Clase 1, 2.1.

Ejemplo 1.27. Exprese $\boldsymbol{a}$ en forma polar. Tome el argumento θ en $0° \leq \theta < 360°$.



Solución: $\boldsymbol{a}$ = (4,120°)

Ejercicio 1.44. Exprese los vectores en forma polar. Tome el argumento θ en $0° \leq \theta < 360°$.



Conversión entre la forma polar y la forma matricial

[B]

Ejemplo 1.28. Exprese $\boldsymbol{a}$ = (2, 120°) en forma matricial.
Solución: Si $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}$, las coordenadas del punto A son los componentes de $\boldsymbol{a}$. (Clase 7)
Las coordenadas del punto A son:
(2cos120°, 2sen120°) = (−1, $\sqrt{3}$)
Por lo tanto $\boldsymbol{a}$ = (−1, $\sqrt{3}$).

Ejercicio 1.45. Exprese en la forma matricial.

a) $\boldsymbol{a}$ = (4, 60°) b) $\boldsymbol{b}$ = (6, 135°)
c) $\boldsymbol{c}$ = (2, 210°) d) $\boldsymbol{d}$ = ($\sqrt{2}$, 315°)

Unidad III • Lección 1 • Clase 15. Forma matricial y forma polar | 97

[A] Forma polar
(8 min)

Ejemplo 1.27
(4 min)

Ejercicio 1.44
(5 min) Solución

$\boldsymbol{a}$ = (2, 40°)

$\boldsymbol{b}$ = (3, 40°)

$\boldsymbol{c}$ = (4,130°)

$\boldsymbol{d}$ = (3, 220°)

$\boldsymbol{e}$ = (4, 310°)

[B] Conversión entre forma polar y matricial.

Ejemplo 1.28
(5 min)

Ejercicio 1.45
(8 min) Solución

a) $\boldsymbol{a} = (2, 2\sqrt{3})$

b) $\boldsymbol{b} = (-3\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$

c) $\boldsymbol{c} = (-\sqrt{3}, -1)$

d) $\boldsymbol{d} = (1, -1)$

Clase 15
(Continuación)

Ejemplo 1.29
(5 min)

Ejercicio 1.46
(10 min) Solución

a) $\boldsymbol{a}$ = (2, 30°)

b) $\boldsymbol{b}$ = (3$\sqrt{2}$, 135°)

c) $\boldsymbol{c}$ = (2$\sqrt{3}$, 210°)

d) $\boldsymbol{d}$ = (2$\sqrt{2}$, 315°)

*Ejemplo 1.30

* Ejercicio 1.47
Solución: Sea θ el ángulo entre $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$.

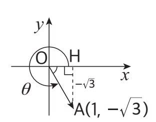
a) 70° – 40° = 30° = θ
$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ = 3(2)cos30°
= 3$\sqrt{3}$

b) 205° – 70° = 135° = θ
$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ = 2(3)cos135°
= –3$\sqrt{2}$

c) 335° – 20° = 315°
→ θ = 45°
$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ = 3(2)cos45°
= 3$\sqrt{2}$

d) 260° – 80° = 180° = θ
$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ = 3(5)cos180°
= –15

Ejemplo 1.29. Exprese $\boldsymbol{a}$ = (1, –$\sqrt{3}$) en forma polar.
Tome el argumento θ en 0° ≤ θ <360°.



Solución: El ΔOAH es un triángulo rectángulo y OH: OA: AH= 1: 2: $\sqrt{3}$.
Por lo tanto, m∠AOH = 60° (Véase Fig.II.1.3).
Luego θ = 300° $\boldsymbol{a}$ = (2, 300°)

OA = $\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}$ = 2

Ejercicio 1.46. Exprese en forma polar.

a) $\boldsymbol{a}$ = ($\sqrt{3}$, 1) b) $\boldsymbol{b}$ = (–3, 3)

c) $\boldsymbol{c}$ = (–3, –$\sqrt{3}$) d) $\boldsymbol{d}$ = (2, –2)

***Ejemplo 1.30.** Sean $\boldsymbol{a}$ = (2, 50°), $\boldsymbol{b}$ = (3,110°).
Encuentre $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.

Solución: Como el ángulo entre $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ es:
110° – 50° = 60°,
$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ = $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$cos60° = 2(3) ($\frac{1}{2}$) = 3 (Respuesta)

Es más rápido que calcular convirtiendo los vectores en la forma matricial.

***Ejercicio 1.47.** Encuentre $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.

a) $\boldsymbol{a}$ = (3, 40°), $\boldsymbol{b}$ = (2, 70°)

b) $\boldsymbol{a}$ = (2, 70°), $\boldsymbol{b}$ = (3, 205°)

c) $\boldsymbol{a}$ = (3, 20°), $\boldsymbol{b}$ = (2, 335°)

d) $\boldsymbol{a}$ = (3, 80°), $\boldsymbol{b}$ = (5, 260°)

98 | Unidad III • Lección 1 • Clase 15. Forma matricial y forma polar

Objetivo: Aplican lo aprendido sobre números reales.

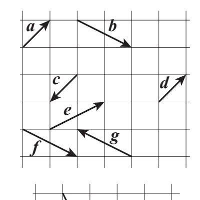
Evaluación: Ejercicios de la lección

Unidad III. Lección 1.
Ejercicios de la lección
(Continúa en la siguiente página)

Ejercicios de la lección

1. a) Encuentre las parejas de vectores iguales. — Clase 1

   b) Encuentre las parejas de un vector y su inverso.



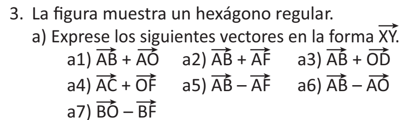
2. Encuentre el punto D de modo que: — Clase 1

   $\overrightarrow{CD} = \boldsymbol{a}$.

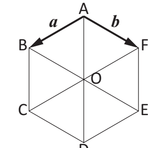
   Encuentre los puntos P de modo que: $\overrightarrow{PQ} \perp \boldsymbol{b}$ y $|\overrightarrow{PQ}| = |\boldsymbol{b}|$.

3. La figura muestra un hexágono regular. — Clase 3

   a) Exprese los siguientes vectores en la forma $\overrightarrow{XY}$.



   a1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AO}$ a2) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF}$ a3) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OD}$
   a4) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{OF}$ a5) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AF}$ a6) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AO}$
   a7) $\overrightarrow{BO} - \overrightarrow{BF}$



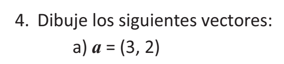
   b) Expresse los siguientes vectores en la forma $p\boldsymbol{a} + q\boldsymbol{b}$. — Clase 3

   Ejemplo: $\overrightarrow{AO} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$

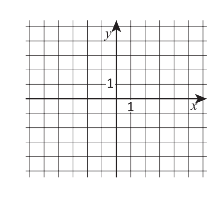
   b1) $\overrightarrow{AC}$ b2) $\overrightarrow{AE}$ b3) $\overrightarrow{AD}$
   b4) $\overrightarrow{BF}$ b5) $\overrightarrow{CF}$

4. Dibuje los siguientes vectores: — Clase 5

   a) $\boldsymbol{a} = (3, 2)$
   b) $\boldsymbol{b} = (-4, 1)$



   c) $\boldsymbol{c} = (2, -3)$
   d) $\boldsymbol{d} = (-3, -4)$



5. Determine el valor de s de modo que la magnitud tenga el valor indicado. — Clase 5

   a) $\boldsymbol{a} = (3, s)$, $|\boldsymbol{a}| = 5$ b) $\boldsymbol{b} = (-4, s)$, $|\boldsymbol{b}| = 5$
   c) $\boldsymbol{c} = (s, -2)$, $|\boldsymbol{c}| = \sqrt{13}$ d) $\boldsymbol{d} = (s, 1)$, $|\boldsymbol{d}| = 2$

6. Encuentre los valores de s y t que satisfacen los siguientes: — Clase 6

   a) $3(s, 5) + 2(-1, t) = (1, 17)$
   b) $-2(s + t, s - t) + (5s - 1, t) = (3, -11)$

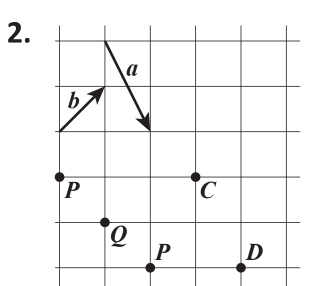
7. Encuentre los valores de s y t que satisfacen los siguientes: — Clase 7

   a) $A(s, 5)$, $B(1, t)$, $\overrightarrow{AB} = (-3, 2)$ b) $A(t, 2s)$, $B(s, 1 - t)$, $\overrightarrow{AB} = (-5, 2)$

Unidad III • Lección 1 • Ejercicios de la Lección | 99

1. a) $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{f}$
b) $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ y $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{g}$

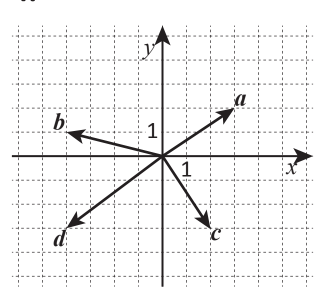
2.



3. a) a1) $\overrightarrow{AC}$ ($\overrightarrow{FD}$)
a2) $\overrightarrow{AO}$ ($\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{FE}$)
a3) $\overrightarrow{AC}$ ($\overrightarrow{FD}$)
a4) $\overrightarrow{AO}$ ($\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{FE}$)
a5) $\overrightarrow{FB}$ ($\overrightarrow{EC}$)
a6) $\overrightarrow{OB}$ ($\overrightarrow{FA}$, $\overrightarrow{EO}$, $\overrightarrow{DC}$)
a7) $\overrightarrow{FO}$ ($\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{FD}$)

b) b1) $2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$
b2) $\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}$
b3) $2\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}$
b4) $-\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$
b5) $-2\boldsymbol{a}$

4.



5.
a) $3^2 + s^2 = 5^2$, $s = \pm 5$
b) $(-4)^2 + 5^2 = 5^2$, $s = \pm 3$
c) $5^2 + (-2)^2 = \sqrt{13}\ ^2$, $s = \pm 3$
d) $5^2 + 1^2 = 2^2$, $s = \pm\sqrt{3}$

6. a) $(3s - 2, 15 + 2t) = (1, 17)$,
$s = 1$, $t = 1$
b) $(3s - 2t - 5, -2s + 7t) = (3, -11)$,
$s = 2$, $t = -1$

7. a) $\overrightarrow{AB} = (1 - s, t - 5) = (-3, 2)$,
$s = 4$, $t = 7$
b) $\overrightarrow{AB} = (s - t, 1 - 2s - t) = (-5, 2)$,
$s = -2$, $t = 3$

Ejercicios de la lección
(Continuación)

8. a) $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b} \Longleftrightarrow \boldsymbol{b} = h\boldsymbol{a}$, $(2, 5) = h(s-1, 1) = (h(s-1), h)$

$h = s$, $s(s-1) = 2$, $s = 2, -1$.

b) $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b} \Longleftrightarrow \boldsymbol{b} = h\boldsymbol{a}$, $(3, s-1) = h(2-s, -1) = h(2-s, -2)$

$h = -\dfrac{s-1}{2}$, $-\dfrac{s-1}{2}(2-s) = 3$, $s = 4, -1$.

8. a) $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b} \Longleftrightarrow \boldsymbol{b} = k\boldsymbol{a}$,

$(2, 5) = k(s-1, 1)$

$= (k(s-1), k)$

$k = s$, $s(s-1) = 2$,

$s = 2, -1$.

b) $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b} \Longleftrightarrow \boldsymbol{b} = k\boldsymbol{a}$,

$(3, s-1) = k(2-s, -1)$

$= k(2-s, -2)$

$k = -\dfrac{s-1}{2}$,

$-\dfrac{s-1}{2}(2-s) = 3$,

$s = 4, -1$.

9. a) $\overrightarrow{AB} = (0, 3)$,

$\overrightarrow{CD} = (s+3, -6)$,

$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD} \Longleftrightarrow \overrightarrow{CD}$

$= k\overrightarrow{AB}$

$(s+3, -6) = k(0, 3)$

$k = -2$, $s + 3 = 0$,

$s = -3$

b) $\overrightarrow{AB} = (-1, 2)$,

$\overrightarrow{CD} = (3, s-4)$,

$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD} \Longleftrightarrow \overrightarrow{CD}$

$= k\overrightarrow{AB}$

$(3, s-4) = k(-1, 2)$

$k = -3$, $s - 4 = -6$

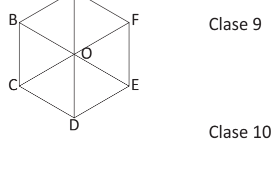
$s = -2$

8. Determine el valor de s de modo que $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$. Clase 8
a) $\boldsymbol{a} = (s-1, 1)$, $\boldsymbol{b} = (2, s)$ b) $\boldsymbol{a} = (2-s, -2)$, $\boldsymbol{b} = (3, s-1)$

9. Determine el valor de s de modo que $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$. Clase 8
a) A(2, −1), B(2, 2), C(−3, 1),D(s, −5)
b) A(4, −1), B(3, 1), C(0, 4), D(3, s)

10. Encuentre los vectores $\boldsymbol{b}$ que son paralelos al vector $\boldsymbol{a}$ y tienen magnitud indicada. Clase 9
a) $\boldsymbol{a} = (5, -12)$, $|\boldsymbol{b}| = 26$
b) $\boldsymbol{a} = (-5, 4)$, $|\boldsymbol{b}| = 41$

11. La figura es un hexágono regular cuyos lados miden 2. Encuentre los siguientes: Clase 9
a) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF}$ c) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{EB}$
d) $\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{FD}$ e) $\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{AB}$



12. Encuentre el valor de $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$. Clase 10
a) $\boldsymbol{a} = (\sqrt{2} + 1, 1)$, $b = (\sqrt{2} - 1, 1)$
b) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} = (\sqrt{3} + \sqrt{2}, \sqrt{3}, -\sqrt{2})$

13. Encuentre el valor de $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$. Clase 10
a) A = $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, B = (1, −1), C = $(\sqrt{6}, \sqrt{6})$, D = $(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$
b) A = $(\sqrt{3}, 4)$, B = $(\sqrt{2}, -1)$, C = $(\sqrt{6}, 1)$, D = (−2, −5)

14. Encuentre el valor de s tal que $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$. Clase 11
a) $\boldsymbol{a} = (s, 4)$, $\boldsymbol{b} = (\sqrt{2}, -1)$ b) $\boldsymbol{a} = (3, s-1)$, $\boldsymbol{b} = (s, 2)$

15. Encuentre el valor de s tal que $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$. Clase 11
a) A(3, 1), B(s, −2), C(−1, 2), D(1, s + 1)
b) A(s, 2), B(3, 1), C(−2, 1), D(s, 5)

16. Encuentre el ángulo θ entre $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ $(0° \leq \theta \leq 180°)$. Clase 12
a) $|\boldsymbol{a}| = 3$, $|\boldsymbol{b}| = 2$, $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = -6$
b) $|\boldsymbol{a}| = 6$, $|\boldsymbol{b}| = 2$, $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 3\sqrt{6}$

17. Exprese $\boldsymbol{p}$ con $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$. Clase 13
a) $\boldsymbol{a} = (3, -2)$, $\boldsymbol{b} = (1, -3)$, $\boldsymbol{p} = (13, -4)$
b) $\boldsymbol{a} = (4, -3)$, $\boldsymbol{b} = (-1, 2)$, $\boldsymbol{p} = (-11, 12)$

18. Encuentre la proyección de $\boldsymbol{a}$ sobre $\boldsymbol{b}$. Clase 14
a) $\boldsymbol{a} = (2, 4)$, $\boldsymbol{b} = (3, 0)$ b) $\boldsymbol{a} = (-3, -3)$, $\boldsymbol{b} = (1, 1)$
c) $\boldsymbol{a} = (3, 4)$, $\boldsymbol{b} = (1, -2)$ c) $\boldsymbol{a} = (3, 4)$, $\boldsymbol{b} = (-1, 2)$

19. Exprese en forma matricial. Clase 15
$\boldsymbol{a} = (6, 30°)$, $\boldsymbol{b} = (7, 90°)$, $\boldsymbol{c} = (4, 150°)$, $\boldsymbol{d} = (1, 180°)$, $\boldsymbol{e} = (8, 240°)$
$\boldsymbol{f} = (2, 270°)$, $\boldsymbol{g} = (2, 300°)$, $\boldsymbol{h} = (10, 330°)$

20. Exprese en forma polar. Clase 15
$\boldsymbol{a} = (2, 2)$, $\boldsymbol{b} = (\sqrt{2}, \sqrt{6})$, $\boldsymbol{c} = (-1, \sqrt{3})$, $\boldsymbol{d} = (-1, -\sqrt{3})$

100 | Unidad III • Lección 1 • Ejercicios de la Lección

Incisos 10 al 16, solución en la siguiente página.

Incisos 17 al 20, solución en la página 116.

10. a) $\boldsymbol{b} = k\boldsymbol{a} = (5k, -12k)$. $|6|^2 = (5k)^2 + (-12k)^2 = 169k^2$

Por otra parte $|\boldsymbol{b}|^2 = 2\boldsymbol{b}^2 = 4 \times 169$. Por lo tanto $k = \pm 2$.

Luego $\boldsymbol{b} = \pm(10, -24)$

b) $\boldsymbol{b} = k\boldsymbol{a} = (-5k, 4k)$. $|\boldsymbol{b}|^2 = (-5k)^2 + (4k)^2 = 41k^2$

Por otra parte $|\boldsymbol{b}|^2 = 41^2$. Por lo tanto $k^2 = 41$, $k = \pm\sqrt{41}$.

Luego $\boldsymbol{b} = \pm(-5\sqrt{41}, 4\sqrt{41})$

11. a) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cos 60° = 2$ b) $2 \cdot 2 \cdot \cos 120° = -2$ c) $4 \cdot 4 \cdot \cos 60° = 8$

d) $2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \cos 60° = 6$ e) $2\sqrt{3} \cdot 2 \cdot \cos 150° = -6$

12. a) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = (\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1) + 1 \cdot 1 = 2$ b) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 + (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 = 10$

13. a) $\overrightarrow{AB} = (1 - \sqrt{2}, -1 - \sqrt{2})$, $\overrightarrow{CD} = (\sqrt{3} - \sqrt{6}, -\sqrt{3} - \sqrt{6})$,

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = (1 - \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{6}) + (-1 - \sqrt{2})(-\sqrt{3} - \sqrt{6}) = 6\sqrt{3}$

b) $\overrightarrow{AB} = (\sqrt{2} - \sqrt{3}, -5)$, $\overrightarrow{CD} = (-2 - \sqrt{6}, -6)$,

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = (\sqrt{2} - \sqrt{3})(-2 - \sqrt{6}) + (-5)(-6) = \sqrt{2} + 30$

14. a) $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b} \Longleftrightarrow \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \sqrt{2}s - 4 = 0$, $s = 2\sqrt{2}$

b) $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b} \Longleftrightarrow \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 3s + (s - 1) \cdot 2 = 0$, $s = \frac{2}{5}$

15. a) $\overrightarrow{AB} = (s - 3, -3)$, $\overrightarrow{CD} = (2, s - 1)$,

$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD} \Longleftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = (s - 3) -2 + (-3)(s - 1) = 0$, $s = -3$

b) $\overrightarrow{AB} = (3 - s, -1)$, $\overrightarrow{CD} = (s + 2, 4)$,

$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD} \Longleftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = (3 - s)(s + 2) + (-1)\, 4 = 0$, $s = 2, -1$

16. a) $\cos\theta = \dfrac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} = \dfrac{-6}{3 \cdot 2} = -1$, $\theta = 180°$

b) $\cos\theta = \dfrac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} = \dfrac{3\sqrt{6}}{6 \cdot \sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\theta = 30°$

17. Sea $\boldsymbol{p} = x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b}$.

a) $(13, -4) = x(3, -2) + y(1, -3)$ $3x + y = 13$, $-2x - 3y = -4$,
$x = 5$, $y = -2$, $\boldsymbol{p} = 5\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b}$

b) $(-11, 12) = x(4, -3) + y(-1, 2)$ $4x - y = -11$, $-3x + 2y = 12$,
$x = -2$, $y = 3$, $\boldsymbol{p} = -2\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b}$

18. a) $\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|^2}\boldsymbol{b} = \dfrac{6}{3^2+0^2}(3, 0) = (2, 0)$

b) $\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|^2}\boldsymbol{b} = \dfrac{-6}{1^2+1^2}(1, 1) = (-3, -3)$

c) $\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|^2}\boldsymbol{b} = \dfrac{-5}{1^2+(-2)^2}(1, -2) = (-1, 2)$

d) $\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|^2}\boldsymbol{b} = \dfrac{5}{(-1)^2+2^2}(-1, 2) = (-1, 2)$

19. a) $(6\cos 30°, 6\text{sen } 30°) = (3\sqrt{3}, 3)$

b) $(7\cos 90°, 7\text{sen } 90°) = (0, 7)$

c) $(4\cos 150°, 4\text{sen } 150°) = (-2\sqrt{3}, 2)$

d) $(\cos 180°, \text{sen } 180°) = (-1, 0)$

e) $(8\cos 240°, 8\text{sen } 240°) = (-4, -4\sqrt{3})$

f) $(2\cos 270°, 2\text{sen } 270°) = (0, -2)$

g) $(2\cos 300°, 2\text{sen } 300°) = (1, -\sqrt{3})$

f) $(10\cos 330°, 10\text{sen } 330°) = (5\sqrt{3}, -5)$

20. a) $(2\sqrt{2}, 45°)$ b) $(2\sqrt{2}, 60°)$

c) $(2, 120°)$ d) $(2, 240°)$

Objetivo: Entender el sistema de las coordenadas rectangulares en el espacio.

Evaluación: Ejercicio 2.1, 2.2

Unidad III. Lección 2.
Clase 1
(Continúa en la siguiente página)

Lección 2. **Vectores en el espacio**

Clase 1. Coordenadas en el espacio

En la Fig. 2.1 tres planos se intersecan perpendicularmente en el punto O. A las tres rectas formadas cada una por la intersección de dos de los tres planos se le denomina eje x, eje y y eje z (Fig. 2.2)

El plano que contiene el eje x y el eje y se llama plano $x-y$. Se define el plano $y-z$ y el plano $z-x$ de la misma manera.

Para cualquier punto P en este espacio se define sus coordenadas como lo siguiente.

Sea A el punto de intersección del eje x con el plano que pasa por P y paralelo al plano $y-z$.

Sea a la coordenada del punto A en el eje x, se define los puntos B y C y sus coordenadas b y c de la misma manera. Entonces se define que las coordenadas del punto P son (a, b, c).

[A]

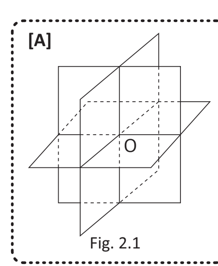


Fig. 2.1

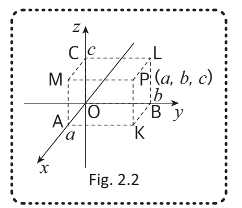


Fig. 2.2

Ejemplo 2.1. En la Fig. 2.2 el sólido OAKB – CMPL es un paralelepípedo rectangular. Encuentre las coordenadas de los puntos A y K.

Solución: El plano que pasa por A y paralelo al plano $y-z$ es el plano PMAK y corta el eje x en el punto A cuya coordenada en eje x es a. Por lo tanto, la coordenada x del punto A es a. De la misma manera se tiene que las coordenadas del punto A son $(a,0,0)$ y las del punto K es $(a, b, 0)$.

OCMA es paralelo al plano $z-x$ y OAKB al plano $x-y$.

Ejercicio 2.1. Encuentre las coordenadas de los puntos B, C, L y M en la Fig. 2.2.

Distancia entre dos puntos

Sean $A(a_1, a_2, a_3)$ y $B(b_1, b_2, b_3)$ dos puntos.
La distancia entre A y B, es decir, la longitud del segmento $\overline{AB}$
es $AB = \sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$

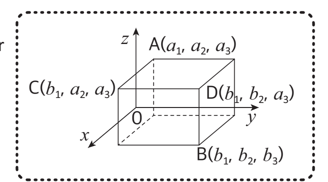
[B]

En particular

$OA = \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$

Demostración. En la figura las caras del paralelepípedo rectangular son paralelas a uno de los planos $x-y$, plano $y-z$ o plano $z-x$.

Aplicando el teorema de Pitágoras al ΔACD se tiene que $AD^2 = AC^2 + CD^2 = (b_1-a_1)^2 + (b_2-a_2)^2$ ...(1)



Unidad III • Lección 2 • Clase 1. Coordenadas en el espacio | 101

[A] Las coordenadas en el espacio. (10 min)

En las figuras de solidos se utilizan líneas quebradas para representar líneas que no se ven.

Ejemplo 2.1 (5 min)

Ejercicio 2.1 (8 min) Solución
B (0, b, 0)

C (0, 0, c)

L (0, b, c)

M (a, 0, c)

[B] Distancia entre dos puntos.
(10 min)

Unidad III. Lección 2.

Clase 1
(Continuación)

Clase 2
(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: Entender la definición de los vectores en el espacio y sus propiedades.

Evaluación: Ejercicio 2.3, 2.4, 2.5

Ejemplo 2.2
(4 min)

Ejercicio 2.2
(8 min) Solución

a) $\sqrt{(4-3)^2+(5-1)^2+(6-2)^2}$

$= \sqrt{33}$

b) $\sqrt{(0-2)^2+(3-(-1))^2+(1-0)^2}$

$= \sqrt{21}$

c) $\sqrt{2^2+(-1)^2+3^2}$

$= \sqrt{14}$

d) $\sqrt{(4-(-3))^2+(+2-1)^2+(2-2)^2}$

$= \sqrt{58}$

[Hasta aquí Clase 1]

[Desde aquí Clase 2]

[A] Definición de vector.

Ejemplo 2.3
(5 min)

Ejercicio 2.3
(8 min)

a) $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$

b) $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$

c) $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$

d) $\overrightarrow{RC} = -\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$

Aplicando al ΔADB, se tiene que $AB^2 = AD^2 + DB^2 = AD^2 + (b_3 - a_3)^2$ . . .(2)

Sustituyendo (1) en (2) se tiene que $AB^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2$

Luego $AB = \sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$

En la demostración están excluidos los casos en que no se puede tomar el paralelepípedo rectangular.

Ejemplo 2.2. Sean A(2, 1, −2) y B(−3, 2, 1) dos puntos. Encuentre la distancia entre A y B.

Solución: $AB = \sqrt{(-3-2)^2+(2-1)^2+(1-(-2))^2}$

$= \sqrt{(-5)^2+1^2+3^2} = \sqrt{35}$

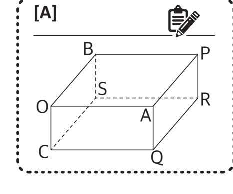
Ejercicio 2.2. Encuentre la distancia entre A y B.

a) A (3, 1, 2) B (4, 5, 6) b) A (2, −1 ,0) B (0, 3, 1)
c) A (0, 0, 0) B (2, −1, 3) d) A (−3, 1, 2) B (4, −2, 2)

Clase 2. Vectores en el espacio

Se definen los vectores en el espacio y sus operaciones como en el plano y se utilizan las mismas notaciones.
Se verifican las mismas propiedades que en las Clases 1.2 y 1.3

[A]



Ejemplo 2.3. La figura muestra un paralelepípedo.
Exprese $\overrightarrow{OR}$ con $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, y $\overrightarrow{OC}$.
Solución: $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PR}$
$= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, porque $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OC}$
Por la propiedad conmutativa se puede cambiar el orden de los términos.

Ejercicio 2.3. En la misma figura exprese los siguientes vectores con $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, y $\overrightarrow{OC}$.
a) $\overrightarrow{OP}$ b) $\overrightarrow{OS}$ c) $\overrightarrow{OQ}$ d) $\overrightarrow{RC}$ e) $\overrightarrow{QS}$ f) $\overrightarrow{BQ}$

Componentes

[B]

Sean $E_1(1, 0, 0)$, $E_2(0, 1, 0)$ y $E_3(0, 0, 1)$ tres puntos.
Se definen tres vectores $\boldsymbol{e}_1 = \overrightarrow{OE_1}$, $\boldsymbol{e}_2 = \overrightarrow{OE_2}$ y $\boldsymbol{e}_3 = \overrightarrow{OE_3}$.
Cualquier vector $\boldsymbol{a}$ se puede representar en una sola manera como
$\boldsymbol{a} = a_1 \boldsymbol{e}_1 + a_2 \boldsymbol{e}_2 + a_3 \boldsymbol{e}_3$, donde a_1, a_2 y a_3 son números reales.
Se les denomina las **componentes** de $\boldsymbol{a}$ al (a_1, a_2, a_3) y se denota
$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$.

e) $\overrightarrow{QS} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$

f) $\overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$

Por la conmutatividad se puede cambiar el orden.

[B] Componentes. (10 min)

Clase 2
(Continuación)

Los componentes de los vectores en el espacio tienen las mismas propiedades como en el plano.

Sean $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$ dos vectores y k un número real.

$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$

$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$

$k\boldsymbol{a} = (ka_1, ka_2, ka_3)$

Véase Clase 1.5 , 1.6

Ejemplo 2.4. Sean $\boldsymbol{a} = (1, 2, 3)$, $\boldsymbol{b} = (4, 5, 6)$. Encuentre los siguientes:
a) $|\boldsymbol{a}|$ b) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ c) $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ d) $-2\boldsymbol{a}$

Solución: a) $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$

b) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (1 + 4, 2 + 5, 3 + 6) = (5, 7, 9)$

c) $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = (1 - 4, 2 - 5, 3 - 6) = (-3, -3, -3)$

d) $-2\boldsymbol{a} = (-2(1), -2(2), -2(3)) = (-2, -4, -6)$

Ejercicio 2.4. Calcule como en el Ejemplo 2.4.

a) $\boldsymbol{a} = (-2, 1, 3)$, $\boldsymbol{b} = (0, 2, 1)$. Encuentre $|\boldsymbol{a}|$, $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ y $3\boldsymbol{a}$.

b) $\boldsymbol{a} = (1, -1, 2)$, $\boldsymbol{b} = (-1, 0, 1)$. Encuentre $|\boldsymbol{a}|$, $\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b}$ y $-2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$.

Sean A (a_1, a_2, a_3) y B (b_1, b_2, b_3) dos puntos.
Entonces se tiene que $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$.

Véase Clase 1.7

Ejemplo 2.5. Sean A (1, 2, 3) y B (6, 5, 4) dos puntos.
Encuentre los componentes de $\overrightarrow{AB}$.

Solución: $\overrightarrow{AB} = (6 - 1, 5 - 2, 4 - 3) = (5, 3, 1)$

Ejercicio 2.5. Encuentre los componentes de $\overrightarrow{AB}$.

a) A (4, 1, 3), B (5, 2, 6) b) A (3, 1, –5), B (0, 1, 1)
c) A (1, –1, 3), B (–4, 1, 0) d) A (4, –2, 3), B (1, –1, 3)

Ejemplo 2.4
(5 min)

Ejercicio 2.4
(8 min) Solución

a) $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 3^2}$
$= \sqrt{14}$

$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (-2, 3, 4)$
$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = (-2, -1, 2)$
$3\boldsymbol{a} = (-6, 3, 9)$

b) $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2}$
$= \sqrt{6}$

$\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b} = (4, -1, -1)$
$-2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (-3, 2, -3)$

Ejemplo 2.5
(3 min)

Ejercicio 2.5
(6 min) Solución

a) $\overrightarrow{AB} = (1, 1, 3)$
b) $\overrightarrow{AB} = (-3, 0, 6)$
c) $\overrightarrow{AB} = (-5, 2, -3)$
d) $\overrightarrow{AB} = (-3, 1, 0)$

Unidad III. Lección 2.
Clase 3

Objetivo: Entender la definición y el cálculo del producto interno.

Evaluación: Ejercicio 2.6, 2.7, 2.8

Definición del producto interno en el espacio es la misma que en el plano, porque si se colocan dos segmentos orientados de modo que sus puntos iniciales coincidan, estos segmentos quedan en un plano.



Ejemplo 2.6
(4 min)



Ejercicio 2.6
(8 min)
Solución
a) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 28$
b) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = -4$
c) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = -10$
d) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = -9$

Ejemplo 2.7
(5 min)

Ejercicio 2.7
(10 min) Solución

a) $\cos\theta = \dfrac{-1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{2}$, $\theta = 150°$

b) $\cos\theta = \dfrac{3}{\sqrt{6}\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\theta = 30°$

c) $\cos\theta = \dfrac{8}{\sqrt{32}\sqrt{8}} = \dfrac{1}{2}$, $\theta = 60°$

d) $\cos\theta = \dfrac{8}{\sqrt{16}\sqrt{8}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\theta = 45°$

Clase 3. Producto interno

Sean $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}$ y $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{OB}$ dos vectores diferentes de $\boldsymbol{0}$.
Se define el ángulo θ ($0° \leq \theta \leq 180°$) entre $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$, como en el plano.

Véase Clase 1.10

Ahora sean $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ cualesquier dos vectores.

Se define el producto interno $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ como lo siguiente.

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \begin{cases} |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta & \text{si } \boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0} \text{ y } \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0} \\ 0 & \text{si } \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0} \text{ ó } \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0} \end{cases}$$

Se tiene que:

Si $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$ entonces
$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$



La demostración es la misma que en el plano. Se aplican la ley de coseno y la formula de la distancia.

Ejemplo 2.6. Sean $\boldsymbol{a} = (2, 1, 3)$ y $\boldsymbol{b} = (4, 6, 5)$. Encuentre $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$

Solución: $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 2(4) + 1(6) + 3(5) = 29$

Ejercicio 2.6. Encuentre $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$.
a) $\boldsymbol{a} = (2, 1, 4)$, $\boldsymbol{b} = (5, 6, 3)$
b) $\boldsymbol{a} = (-2, 1, 0)$, $\boldsymbol{b} = (3, 2, 1)$
c) $\boldsymbol{a} = (-1, 2, 3)$, $\boldsymbol{b} = (5, -1, -1)$
d) $\boldsymbol{a} = (1, 3, -4)$, $\boldsymbol{b} = (2, -1, 2)$

Ejemplo 2.7. Sean $\boldsymbol{a} = (0, 1, 1)$ y $\boldsymbol{b} = (1, 1, 0)$ dos vectores.
Encuentre el ángulo θ entre $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ donde $0° \leq \theta \leq 180°$.

Véase ejemplo 1.22

Solución: $\cos\theta = \dfrac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} = \dfrac{0(1) + 1(1) + 1(0)}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2}\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}} = \dfrac{1}{2}$

Como $0° \leq \theta \leq 180°$, $\theta = 60°$

Ejercicio 2.7. Encuentre el ángulo θ entre $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ donde $0° \leq \theta \leq 180°$.
a) $\boldsymbol{a} = (1, 1, 0)$, $b = (-1, 0, -1)$ b) $\boldsymbol{a} = (2, 1, 1)$, $\boldsymbol{b} = (1, 1, 0)$
c) $\boldsymbol{a} = (2 - 2\sqrt{3}, 3 + \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3})$, $\boldsymbol{b} = (2, \sqrt{3}, 1)$
d) $\boldsymbol{a} = (\sqrt{6} - \sqrt{2}, \sqrt{3} + 1, \sqrt{3} + 1)$, $\boldsymbol{b} = (\sqrt{6}, 1, 1)$

Ejemplo.2.8. Sean $\boldsymbol{a} = (-2, 1, 3)$ y $\boldsymbol{b} = (x, 4, -2)$. Encuentre el valor de x tal que $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$.
Solución: $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = -2(x) + 1(4) + 3(-2) = -2x - 2$.
Por otra parte $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b} \iff \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$.
Por lo tanto $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b} \iff -2x - 2 = 0$, $x = -1$ (Respuesta)

Véase ejemplo 1.19

Ejercicio 2.8. Encuentre el valor de x tal que $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$.
a) $\boldsymbol{a} = (1, 3, -2)$, $\boldsymbol{b} = (x, 2, 4)$
b) $\boldsymbol{a} = (-1, 3, 1)$, $\boldsymbol{b} = (2, x, -4)$
c) $\boldsymbol{a} = (3, 5, 2)$, $\boldsymbol{b} = (-1, 1, x)$
d) $\boldsymbol{a} = (x, -2, 3)$, $\boldsymbol{b} = (3, 1, -1)$

104 | Unidad III • Lección 2 • Clase 3. Producto interno

Ejemplo 2.8. (5 min)

Ejercicio 2.8. (8 min). Solución
a) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = x - 2 = 0$, $x = 2$
b) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 3x - 6 = 0$, $\boldsymbol{x} = 2$
c) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 2x + 2 = 0$, $x = -1$
d) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 3x - 5 = 0$, $x = \dfrac{5}{3}$

Objetivo: Aplican lo aprendido sobre números reales.

Evaluación: Ejercicios de la lección

Unidad III. Lección 2.
Ejercicios de la lección

Problemas de la Unidad A
(Continúa en la siguiente página)

Ejercicios de la lección

1. Encuentre la distancia entre A y B. Clase 1
   a) A(–3, 0, 4), B(–1, 2, –5) b) A(1, –2, –5), B(–3, –1, 2)

2. Dados tres vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$, encuentre lo que se pide. Clase 2
   a) $\boldsymbol{a} = (2, -1, 4)$, $\boldsymbol{b} = (3, 0, -5)$, $\boldsymbol{c} = (1, 3, -1)$, $|\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b} + 3\boldsymbol{c}|$
   b) $\boldsymbol{a} = (-1, -2, 0)$, $\boldsymbol{b} = (1, 3, 1)$, $\boldsymbol{c} = (0, 1, -1)$, $|3\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} + 2\boldsymbol{c}|$

3. Encuentre los componentes de $\overrightarrow{AB}$. Clase 2
   a) A(0, –5, 2), B(6, 9, –3) b) A(–1, 7, 5), B(–3, 7, –7)

4. Encuentre $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$. Clase 3
   a) A(–1, 0, 2), B(3, 1, 0), C(2, –4, 1), D(5, 3, –1)
   b) A(1, $\sqrt{2}$, 1), B($\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, 0), C(–1, $\sqrt{2}$, 3), D($\sqrt{2}$, $-\sqrt{3}$, –2)

5. Encuentre el valor del ángulo θ entre $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ donde $0° \leq \theta \leq 180°$. Clase 3
   a) $\boldsymbol{a} = (1, -1, 0)$, $\boldsymbol{b} = (2, -1, 2)$
   b) $\boldsymbol{a} = (-\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 1)$, $\boldsymbol{b} = (3, -2, -\sqrt{3})$

6. Encuentre el valor de s tal que $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$. Clase 3
   a) $\boldsymbol{a} = (3, 4, s)$, $\boldsymbol{b} = (s, 1, -2)$ b) $\boldsymbol{a} = (s, -1, 1)$, $\boldsymbol{b} = (2s, -s + 2, 1)$

Problemas de la Unidad A

1. Dados tres puntos A(–3, 2), B(0, –2) y C(1, –1), encuentre las coordenadas del punto D que satisfacen las condiciones siguientes:
   $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$, $|\overrightarrow{CD}| = 10$

2. Determine el valor de s de modo que $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ tenga el valor indicado.
   a) $\boldsymbol{a} = (s - 3, 4)$, $\boldsymbol{b} = (s, -s)$, $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 18$
   b) $\boldsymbol{a} = (s^2 - 2s, 3s)$, $\boldsymbol{b} = (2, s - 4)$, $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = -3$

3. Determine el valor de s de modo que la longitud de la proyección de $\boldsymbol{a}$ sobre $\boldsymbol{b}$ sea 3 cuando $\boldsymbol{a} = (s - 1, s + 2)$ y $\boldsymbol{b} = (3, -4)$.

Inciso 1) y 2) solución en pág. 123

3. a) $\overrightarrow{AB} = (6, 14, -5)$
b) $\overrightarrow{AB} = (-2, 0, -12)$

4.
a) $\overrightarrow{AB} = (4, 1, -2)$,
$\overrightarrow{CD} = (3, 7, -2)$,
$\overrightarrow{AB} \cdot \text{CD} = 23$

b) $\overrightarrow{AB} = (\sqrt{2} - 1, \sqrt{3} - \sqrt{2}, -1)$,
$\overrightarrow{CD} = (\sqrt{2} + 1, -\sqrt{3} - \sqrt{2}, -5)$,
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 5$

5.
a) $\cos\theta = \dfrac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} = \dfrac{3}{\sqrt{2} \cdot 3} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\theta = 45°$

b) $\cos\theta = \dfrac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} = \dfrac{-8\sqrt{3}}{4 \cdot 4} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\theta = 150°$

6. $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b} \iff \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$
a) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = s + 4 = 0$, $s = -4$
b) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 2s^2 + s - 1 = (2s - 1)(s + 1) = 0$, $s = \dfrac{1}{2}, -1$

Problemas de la Unidad A. Solución en página 123

Unidad III. Lección 2.

Problemas de la Unidad B

1.

a) Sea (x_1, y_1) y (x_2, y_2) las coordenadas del punto B y C respectivamente.

Como B y C son los puntos de la recta l, se tiene que $ax_1 + by_1 + c = 0$ ... (2) y $ax_2 + by_2 + c = 0$ ... (3).

Sacando (2) de (3) se tiene que $a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) = 0$ ...(3)

Como $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1), (y_2 - y_1)$, el lado izquierdo de (4) es $\boldsymbol{p}.\overrightarrow{AB}$,. Luego $\boldsymbol{p} \perp \overrightarrow{AB}$.

b) $\text{AH} = \left| \dfrac{\overrightarrow{AQ} \cdot \boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{p}|^2} \boldsymbol{p} \right|$

$= \left| \dfrac{\overrightarrow{AQ} \cdot \boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{p}|} \right|$

$= \dfrac{|(u-s)a-(v-t)b|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$= \dfrac{|(au-bv)-(as-bt)|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Como Q está en l, se tiene que $au + bv + c = 0$. Por lo tanto

$\text{AH} = \dfrac{|-c-(as+b+l)|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$= \dfrac{|as+bt+l|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Problemas de la Unidad B

1. Sean a, b y c tres números reales tal que $(a, b) \neq (0, 0)$.
   Sea $ax + by + c = 0$ ...(1) una ecuación.

   Si $b \neq 0$, entonces (1) equivale a $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$, que es una ecuación de recta.

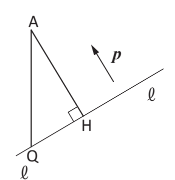
   Si $b = 0$, entonces $a \neq 0$ y (1) equivale a $x = -\frac{c}{a}$, que representa la recta perpendicular al eje x.

   En ambos casos (1) representa una recta ℓ.

   a) Demuestre que el vector $\boldsymbol{p} = (a, b)$ es perpendicular al vector $\overrightarrow{BC}$, donde B y C son dos puntos diferentes de la recta ℓ.

   b) Sea A(s, t) un punto fuera de la recta ℓ.
   Sea H el pie de la perpendicular de la recta ℓ que pasa por A.
   Entonces se verifica las siguientes:
   - $\overrightarrow{AH} \parallel \boldsymbol{p}$
   - Sea Q(u, v) cualquier punto de la recta ℓ.
     AH es igual a la magnitud de la proyección de $\overrightarrow{AQ}$ sobre $\boldsymbol{p}$.

   Utilizando estos hechos, represente AH con a, b, c, s y t.



2. Sean A y B dos puntos diferentes en el espacio cuyas coordenadas satisfacen la ecuación $x - 2y + 3z - 4 = 0$ ... (1)
   Sea $\boldsymbol{p} = (1, -2, 3)$ un vector.
   Demuestre que $\boldsymbol{p} \perp \overrightarrow{AB}$.

106 | Unidad III • Problemas de la Unidad B

Inciso 2) solución en pág. 124

Solucionario Ejercicios de la lección. Incisos 1) y 2) pág. 65

1. a) $\sqrt{\{-1-(-3)\}^2+(2-0)^2+(-5-4)^2} = \sqrt{4+4+81} = \sqrt{89}$

b) $\sqrt{(-3-1)^2+\{-1-(-2)\}^2+\{2-(-5)\}^2} = \sqrt{16+1+49} = \sqrt{66} = 2\sqrt{14}$

2. a) $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c} = (2,-1,4)-(6,0,-10)+(3,9,-3) = (-1,8,11)$

$|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c}| = \sqrt{(-1)^2+8^2+11^2} = \sqrt{186}$

b) $3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c} = (-3,-6,0)-(1,3,1)+(0,2,-2) = (-4,-7,-3)$

$|3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}| = \sqrt{(-4)^2+(-7)^2+(-3)^2} = \sqrt{74}$

Solucionario Problemas de la Unidad A.

1. Sea D(x, y). Entonces $\overrightarrow{AB} = (3,-4)$, $\overrightarrow{CD} = (x-1, y+1)$.

$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD} \iff$ existe, $\boldsymbol{k} \neq 0$ tal que $\overrightarrow{CD} = \boldsymbol{k}\overrightarrow{AB}$, $(x-1, y+1) = (3\boldsymbol{k}, -4\boldsymbol{k})$

$|\overrightarrow{CD}| = 10 \iff (3\boldsymbol{k})^2+(-4\boldsymbol{k})^2 = 10^2$, $\boldsymbol{k}^2 = 4$, $\boldsymbol{k} = \pm 2$

Por lo tanto $(x-1, y+1) = \pm(6,-8)$.

Luego D(7, −9) ó (−5, 7)

2. a) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = (s-3)\,s+4(-s) = s^2-7s$, $s^2-7s = 18$, $s = -2, 9$

b) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = (s^2-2s)\cdot 2+3s(s-4) = 5s^2-16$, $5s^2-16s = -3$, $s = 3, \frac{1}{5}$

3. La proyección es $\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|^2}\boldsymbol{b}$ y su longitud es

$$\frac{|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{b}|} = \frac{|(s-1)\cdot 3-(s+2)\cdot 4|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \frac{|s+15|}{5}$$

Por lo tanto $\dfrac{|s+15|}{5} = 3$, $s = 0, -30$

Solución Problemas de la Unidad B. Inciso 2. Pág. 66

2. Sea (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2) las coordenadas de los puntos A y B respectivamente.

Como A y B satisfacen la ecuación (l),

se tiene que $x_1 - 2y_1 + 3z_1 - 4 = 0$ ... (2) y $x_2 - 2y_2 + 3z_2 - 4 = 0$ ... (3).

Sacando (2) de (3) se tiene que $(x_2 - x_1) - 2(y_2 - y_1) + 3(z_2 - z_1) = 0$ ...(8)

Es decir, $\boldsymbol{p}.\overrightarrow{AB} = 0$. Luego $\boldsymbol{p} \perp \overrightarrow{AB}$.

Objetivo: **[A]** Definen una matriz y determinan su tamaño.
[B] Identifican elementos de una matriz n x m.

Evaluación: Ejercicio 3.1

Unidad III. Lección 3.
Clase 1
(Continúa en la siguiente página)

Lección 3. Matrices

Clase 1. Definición de matrices (introducción 1)

Ejemplo 3.1. Se administra una tienda de ropa y se quiere hacer un registro de los artículos que se vendieron el día lunes por la mañana y por la tarde, para la cual se lista los datos en la siguiente tabla.

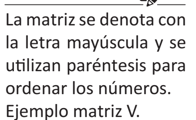
[A]

Cantidad de piezas vendidas el lunes

Venta	camisas	pantalones	chaquetas
Por la mañana	5	3	6
Por la tarde	7	4	3

La información presentada en la tabla se presenta utilizando un arreglo rectangular llamado matriz.

$$V = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 6 \\ 7 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$



La matriz se denota con la letra mayúscula y se utilizan paréntesis para ordenar los números. Ejemplo matriz V.

Definicion 3.1. Una matriz es un arreglo rectangular de números, los cuales constituyen los elementos de la matriz, cada línea horizontal de elementos se conoce como fila y cada línea vertical de elementos se conoce como columna.

En una matriz a la fila también se le conoce como renglón.

En el ejemplo 3.1 la matriz

$$V = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 6 \\ 7 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \ldots \text{ fila 1} \\ \ldots \text{ fila 2} \end{matrix}$$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$

1 2 3

Columnas



Ejemplo 3.2.
Utilice la matriz del Ejemplo 3.1 para responder las siguientes preguntas.

[B]

¿Cuántas filas tiene la matriz V?.

¿Cuántas columnas tiene la matriz V?.

Solución:
El tamaño de la matriz V es 2 filas x 3 columnas y se denota 2x3.

Unidad III • Lección 3 • Clase 1. Definición de matrices | 107

[A]



Ejemplo 3.1
(10 min)
M: ¿De qué se trata el problema?
RP: Registro de artículos de una tienda.
M: ¿Cómo esta ordenada la información?
RP: En una tabla de doble entrada.
M: ¿Habrá otra forma en la que podamos presentar esta información?
RP: No se

Concluye: La información de la tabla puede ser presentada mediante un arreglo que llamamos matriz. A cada una de las líneas horizontales se les llama fila y cada línea vertical se le llama columna.

*Pedir a los estudiantes que proporcionen ejemplos de la vida cotidiana que pueden ser expresadas mediante matrices. (3min)

[B]

*** Ejemplo 3.2** (10 min).
M: ¿Cuántas filas tiene la matriz V?, ¿Cuántas columnas?

Concluye: El tamaño de una matriz está dada por el producto de sus filas y sus columnas. Es decir, el tamaño o dimensión de V es 2x3.

Clase 1
(Continuación)

*Nota: Plantear más ejercicios donde el estudiante determine el tamaño de las matrices y pueda ubicar filas y columnas sin dificultad.

Concluye: Que el tamaño de una matriz está dado por m x n donde n es el número de filas y m el número de columnas.

*Ejemplo 3.3
(5 min)

*Para localizar un elemento en una matriz se debe hacer uso de la ubicación de la fila y la columna. Se utiliza a_{ij} donde i representa la fila y j la columna. a_{ij} es el elemento de la matriz.

Ejercicio 3.1
(17 min) Solución

a1) 2 x 2 a2) 3 x 1

a3) 3 x 3 a4) 1 x 3

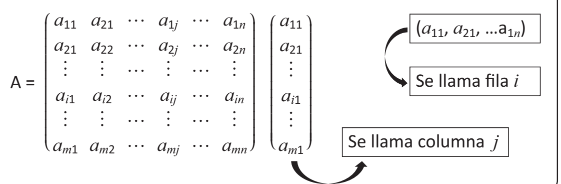
a5) 2 x 3

b1) $a_{12} = -5$ $a_{22} = -3$ $a_{23} = 4$

b2) $b_{11} = -4$ $b_{31} = 5$

b3) $c_{13} = 3$ $c_{31} = 6$ $c_{33} = 1$

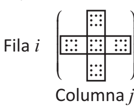
Definición 3.2. Una matriz A de m x n es un arreglo rectangular de mn números donde m representa el número de filas o renglones y n el número de columnas



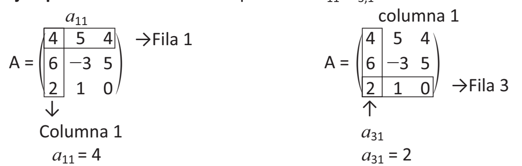
a_{11}, a_{21}, ...a_{n1}, etc. Son elementos de la matriz A.

Si una matriz A tiene el mismo número de filas y columnas se le llama matriz cuadrada.

a_{ij} representa el elemento a en la fila i y la columna j.
(i, j) elemento



Ejemplo 3.3. Localizar las componentes a_{11} $a_{3,1}$



Ejercicio 3.1.

a) Dadas las siguientes matrices determine su tamaño.

a1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ a2) $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ a3) $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

a4) $D = (-1 \ \ 8 \ \ 2)$ a5) $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

b) Sean $A = \begin{pmatrix} 6 & -5 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

b1) ¿Cuánto valen a_{12} a_{22} a_{23}?.

b2) ¿Cuánto valen b_{11} b_{31}?.

b3) ¿Cuánto valen c_{13} c_{31} c_{33} ?.

c) Las cantidades de grasa, carbohidratos y proteínas en los grupos de alimentos son, respectivamente como sigue:
grasa: 5, 0, 0, 10 carbohidratos: 0, 10, 15, 12 proteínas: 7, 1, 2, 8
muestre la información en una matriz de 4 x 3.

d) Suponga que hay 8 kcal por unidad de grasa, 4kcal por unidad de carbohidratos y 5 kcal por unidad de proteína. Muestre esos datos en una matriz de 3x1.



Para definir el tamaño de una matriz primero consideramos el número de filas y luego el número de columnas.

c) Grasas carbohidratos proteínas

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 7 \\ 0 & 10 & 1 \\ 0 & 15 & 2 \\ 10 & 12 & 8 \end{pmatrix}$$

d) grasa, carbohidrato, proteina $\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

Objetivo: **[A]** Determinan la igualdad de matrices.
[B] Definen matriz fila y matriz columna.

Unidad III. Lección 3.
Clase 2

Evaluación: Ejercicio 3.2

Clase 2. Definición de matrices (introducción 2)

Ejemplo 3.4. Compare el tamaño y las componentes de las siguientes matrices.

$$A=\begin{pmatrix}4 & 1 & 5\\ 2 & -3 & 0\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}1+3 & 1 & 2+3\\ 1+1 & 1-4 & 6-6\end{pmatrix}$$

Solución:

$a_{11}=b_{11}$ $4=1+3$ $a_{12}=b_{12}$ $1=1$ $a_{13}=b_{13}$ $5=2+3$ $a_{14}=b_{14}$ $2=1+1$

$a_{22}=b_{22}$ $-3=1-4$ $a_{23}=b_{23}$ $0=6-6$

Definición 3.3. Dos matrices A=(a_{ij}) y B = (b_{ij}) son iguales si:
a) Son del mismo tamaño.
b) Las componentes correspondientes son iguales.



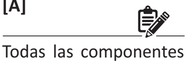
Ejercicio3.2.

a) Si $\begin{pmatrix}a & 2b\\ 3 & -12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 6\\ -x & 3y\end{pmatrix}$ determine a, b, x, y

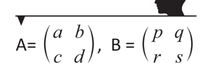
b) $\begin{pmatrix}a+b & c+d\\ c-d & a-b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 6\\ 10 & 2\end{pmatrix}$

Definición 3.4
Matriz fila
Es un conjunto ordenado de n números escritos de la siguiente manera $(a_{11}\ \ a_{12}\ \dots\ a_{1n})$; es decir consta de una sola fila.
Matriz Columna
Es un conjunto ordenado de n números escritos de la siguiente manera $\begin{pmatrix}a_{11}\\ a_{21}\\ \vdots\\ a_{n1}\end{pmatrix}$; es decir consta de una sola columna.

[A]



Todas las componentes de la matriz A y B son iguales y a la vez su tamaño. Por tanto A = B.



A= $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix}p & q\\ r & s\end{pmatrix}$

A = B ⇔ $a=p$, $b=q$
$c=r$, $d=s$

Aplica la definición 3.3 para resolver

[B]



En el Ejercicio1.1 nota que la matriz D consta de una sola fila por lo que se conoce como matriz fila.



La matriz B consta de una sola columna por lo que se conoce como matriz columna.

*Es importante hacer notar en el estudiante que la matriz fila puede tener más columnas y de igual manera con la matriz columna puede tener más filas.

[A]



Ejemplo 3.4.
(20 min)
*Es importante que el estudiante tenga en cuenta que cuando compara matrices estos deben ser del mismo tamaño.
M: ¿Cuándo las matrices son iguales?
RP: Cuando sus componentes son iguales.
Concluye en la definición 3.3.



***Ejercicio 3.2.**
(15 min)
Verificar que los estudiantes trabajen correctamente en su cuaderno.
Solución:
a) $a=4$ $b=3$
$x=-3$ $y=-4$
b) $a=3$ $b=1$
$c=8$ $d=-2$

Definir la matriz fila y la matriz columna (10 min)

Concluye: Que una matriz fila es la matriz que consta de una sola fila y matriz columna consta de una sola columna.

Unidad III. Lección 3.
Clase 3
(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: **[A]** Resuelven ejercicios y problemas aplicando la suma de matrices .

Evaluación: Ejercicio 3.3

[A]

Ejemplo 3.5
(15 min)
M: ¿De qué trata el problema?
RP: Costos de manufactura
M: ¿De qué forma podemos resolver el problema?

*El maestro(a) puede intentar que los alumnos deduzcan que se trata de una suma y que hagan propuestas de cómo hacerlo antes de ver el libro.

*Definen la suma de dos matrices como la matriz obtenida de sumar las componentes correspondientes de ambas matrices.

*Analizan regla para sumar matrices.

Concluyen que las propiedades de suma de números reales se aplican a la suma de matrices.

Clase 3. Definición de la adición, matriz nula, matriz opuesta

Ejemplo 3.5.
Una fábrica de cierto producto realiza tres modelos, A, B y C. Partes de cada modelo se realizan en una fabrica F_1 y luego se finalizan en otra fabrica F_2 en otra ciudad. El costo total de cada producto consta de los costos de manufactura y del embarque. A continuación, se muestran los costos en dólares en cada fábrica.

Costo de Manufactura, Costo de embarque:

$$F_1 = \begin{pmatrix} 32 & 40 \\ 50 & 80 \\ 70 & 20 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{Modelo A} \\ \text{Modelo B} \\ \text{Modelo C} \end{matrix}$$

Costo de manufactura, Costo de embarque:

$$F_2 = \begin{pmatrix} 40 & 60 \\ 50 & 50 \\ 30 & 20 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{Modelo A} \\ \text{Modelo B} \\ \text{Modelo C} \end{matrix}$$

¿Cuál es el costo total de manufactura y embarque del producto?

Solución:
La matriz $F_1 + F_2$ proporcionará los costos totales de la manufactura y el embarque de cada producto.

$$F_1 + F_2 = \begin{pmatrix} 32+40 & 40+60 \\ 50+50 & 80+50 \\ 70+30 & 20+20 \end{pmatrix} \Longrightarrow F_1 + F_2 = \begin{pmatrix} 72 & 100 \\ 100 & 130 \\ 100 & 40 \end{pmatrix}$$

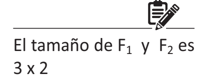
Definición 3.5. Sean A y B dos matrices m x n, entonces la adición de A y B se denota A + B, está determinada por la matriz obtenida sumando los elementos correspondientes.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+p & b+q \\ c+r & d+s \end{pmatrix}$$

[A]

El tamaño de F_1 y F_2 es 3 x 2



Para conocer el total es necesario sumar las componentes correspondientes a cada producto.

Objetivo: **[B]** Definen una matriz nula como la matriz cero.

Clase 3
(Continuación)

Evaluación: Ejercicio 3.4

Ejercicio 3.3.

a) Dados las siguientes matrices realice los siguientes cálculos.

$A = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$

$D = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ $E = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ $F = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

a1) A + C a2) A + E a3) A + C + E
a4) B + D a5) B + F a6) B + D + F

Recuerde que la suma de dos o más matrices se puede efectuar solo cuando son del mismo tamaño.

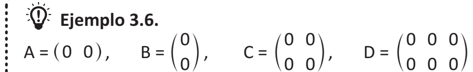
b) Realice las siguientes adiciones.

b1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 4 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$ b2) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

b3) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ b4) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 3 & 2 & -2 \\ -4 & 5 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Una matriz cuyos elementos son ceros se les llama matriz nula o matriz cero. **[B]**

Ejemplo 3.6.


$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

A, B, C, D son matrices nulas

Observe que las matrices son de diferente tamaño, pero todas sus componentes son ceros.

Dada la matriz A de m x n se define como matriz opuesta de A a la matriz m x n determinada por –A. Los componentes de –A son los componentes de A con signo opuesto.

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $-A = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$

Ejemplo 3.7.

$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ $-A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$

Ejercicio 3.4.

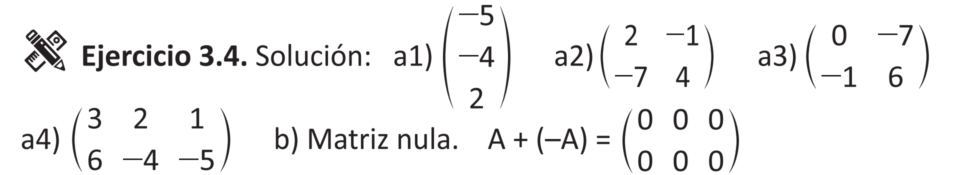
a) Encuentre la matriz opuesta

a1) $\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ a2) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$ a3) $\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}$ a4) $\begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 \\ -6 & -4 & -5 \end{pmatrix}$

La matriz opuesta de A es –A y viceversa la opuesta de –A es A.

b) Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ ¿Qué tipo de matriz resulta si sumamos A + (–A)?

Unidad III • Lección 3 • Clase 3. Definición de la adición, matriz nula, matriz opuesta | 111


Ejercicio 3.4. Solución: a1) $\begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ a2) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}$ a3) $\begin{pmatrix} 0 & -7 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$

a4) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & -4 & -5 \end{pmatrix}$ b) Matriz nula. $A + (-A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

*Hacer supervisión individual para garantizar que hubo entendimiento.


Ejercicio 3.3.
(15 min)

a1) $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 11 \end{pmatrix}$ a2) $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

a3) $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$ a4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

a5) $\begin{pmatrix} 9 & -1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

a6) $\begin{pmatrix} 7 & 2 & 4 & 11 \end{pmatrix}$

b1) $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 9 \\ -8 & 7 \end{pmatrix}$ b3) $\begin{pmatrix} 11 & 1 \\ 9 & 4 \end{pmatrix}$

b2) $\begin{pmatrix} 7 & -2 & 4 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix}$

b4) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 2 & 7 & -1 \\ -4 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

[B] Definir una matriz nula (15 min)

Concluye: Una matriz nula es la que todos sus elementos o componentes son ceros.

*Hacer notar al alumno(a) que puede haber matrices nulas de diferente tamaño o dimensión.

*Definir una matriz opuesta


***Ejemplo 3.7.**

¿Cuál es la diferencia de A con –A?

RP: El signo cambia.

Concluye: que la matriz opuesta de A es la misma con signo contrario.

Objetivo: **[A]** Definen las propiedades de la adición de matrices.

Evaluación: Ejercicio 3.6

Unidad III. Lección 3.

Clase 4

(Continúa en la siguiente página)

[A] Propiedades de la adición de matrices

***Ejercicio 3.5** (10 min)

M: ¿Qué pueden concluir del inciso a) y b); c) y d) y de e)?

RP: Las matrices resultantes son iguales en cada pareja.

*Hacer notar al estudiante que en la suma de matrices se cumplen las mismas propiedades que en la suma de números reales.

a) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 8 & 6 \\ 6 & -7 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 8 & 6 \\ 6 & -7 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 12 & 9 \\ 4 & -6 & 3 & 8 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 12 & 9 \\ 4 & -6 & 3 & 8 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

*Analizan la demostración de la propiedad conmutativa (10 min).

Clase 4. Propiedades de la adición de matrices, sustracción

Ejercicio 3.5. Dadas las siguientes matrices calcule:

$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 0 & 3 \\ 6 & -8 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 \\ -2 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) A + B b) B + A c) (A + B) + C d) A + (B + C) e) A + D

[A]

¿Qué se puede concluir con respecto a A + B y B + A, (A + B) + C y A + (B + C) ?

¿Qué se concluye de la suma A+D?

Teorema 3.1. Sean A, B y C tres matrices mxn entonces

A + B = B + A propiedad conmutativa

(A + B) + C = A + (B + C) propiedad asociativa

A + 0 = A

A + (–A) = 0

Demostración:

a) A + B = B + A

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$

Entonces

$A + B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$

Sumando cada elemento correspondiente de A y B.

$B + A = \begin{pmatrix} b_{11}+a_{11} & b_{12}+a_{12} & \cdots & b_{1n}+a_{1n} \\ b_{21}+a_{21} & b_{22}+a_{22} & \cdots & b_{2n}+a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{m1}+a_{m1} & b_{m2}+a_{m2} & \cdots & b_{mn}+a_{mn} \end{pmatrix}$

En los números reales se cumple que A + B = B + A

Por tanto A + B = B + A

Ejercicio 3.6. Demuestre la propiedad b), c) y d) del teorema 3.1

Ejercicio 3.7. En el ejercicio 3.5 calcule A + (–B)

112 | Unidad III • Lección 3 • Clase 3. Propiedades de la adición de matrices, sustracción

Ejercicio 3.6. Utilizando como referencia la demostración anterior para desarrollar las demás propiedades (pueden ser asignadas como tarea).

Ejercicio 3.7. (10 min) $\begin{pmatrix} 5 & 8 & 8 & 0 \\ -6 & 9 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

Objetivo: **[B]** Definen la sustracción de Matricies y demostrar las propiedades que la sustracción de matrices cumple.

Clase 4
(Continuación)

Evaluación: Ejercicio 3.10

Definición 3.6. Sean A y B dos matrices de m x n, entonces la resta, que se denota A-B, está determinado por la matriz obtenida restando los elementos correspondientes

A = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ B = $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ A – B = $\begin{pmatrix} a-p & b-q \\ c-r & d-s \end{pmatrix}$

[B]

Ejercicio 3.8.
Calcule

a) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & -6 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 6 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

Ejercicio 3.9. Tomando como referencia las matrices del Ejerccicio 3.5 calcule:

a) A – A

b) A – B

c) A + (–B)

¿Qué tipo de matriz resulta A – A?.
¿Qué relación hay entre las matrices resultantes de b) y c)?

Teorema 3.2. Sean A y B dos matrices de m x n entonces:
a) A – A = 0 → matriz nula o cero
b) A – B = A + (–B)

En la sustracción de matrices no se cumple la propiedad conmutativa ni la asociativa.
Observe que si
A – B = X
Es decir X es una matriz que resulta de la resta de A y B entonces se cumple que: A = X + B

A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ B = $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$

A – B = $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -10 \end{pmatrix}$ = X

A = X + B

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$

A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$

Ejercicio 3.10. Demuestre la propiedad de la sustracción a) y b).

Unidad III • Lección 3 • Clase 3. Propiedades de la adición de matrices, sustracción | 113

[B] Sustracción de matrices.

*Definir la sustracción de matrices

***Ejercicio 3.8**
(5 min) Solución

a) $\begin{pmatrix} -7 & 10 \\ -10 & 3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & -9 & -2 \\ -4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

***Ejercicio 3.9**
(5 min) Solución

a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 5 & 8 & 8 & 0 \\ -6 & 9 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 5 & 8 & 8 & 0 \\ -6 & 9 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

* Concluir en el teorema 3.2 de las propiedades de la sustracción de matrices

* Es importante que el docente haga énfasis que las propiedades que se cumplen en las matrices son las mismas que en los números reales.

* Hacer notar que la propiedad conmutativa y asociativa no se cumple en la sustracción de matrices.

*** Ejercicio 3.10.** Puede asignarse como tarea. (5 min) Solución

a) $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-a & b-b & c-c \\ d-d & e-e & f-f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} g & h & i \\ j & k & l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-g & b-h & c-i \\ d-j & e-k & f-l \end{pmatrix}$

Unidad III. Lección 3.
Clase 5
(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: **[A]** Multiplicar un escalar por una matriz.

Evaluación: [A] Ejercicios 3.11 y 3.12
[B] Ejercicios 3.13 y 3.14

Calcular A + A dada la matriz A.
*Recordar la suma de matrices.
M: ¿Cómo son los elementos de A + A en relación a los elementos de la matriz A?

*Resaltar que los elementos de A + A son el doble de los elementos de la matriz A. (5 min).

[A] Definir la multiplicación de un escalar por una matriz.

*Hacer énfasis en que el escalar se multiplica por cada uno de los elementos de la matriz. (3 min).

Ejemplo 3.9
(5 min) Concluir que el escalar 3 multiplica a cada elemento de la matriz B.

Ejercicios 3.11
Solución:

a) $\begin{pmatrix} 20 & 12 \\ -16 & -32 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -15 & -9 \\ 12 & 24 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} \frac{15}{2} & \frac{9}{2} \\ -6 & -12 \end{pmatrix}$

Ejercicio 3.12.
(7 min) Solución:

a) $1\begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Clase 5. Multiplicación de un escalar por una matriz

Ejemplo 3.8.
Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ encuentre A + A.

Solución: $A + A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -8 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

¿Cómo son los elementos de A + A en relación a los elementos de la matriz A?
Los elementos de la matriz A + A son el doble de los elementos de la matriz A, es decir, es como multiplicar todos los elementos de la matriz A por 2.

Definición 3.7
Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y k un número real, se define el producto

$$kA = \begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 3.9. Dado $B = \begin{pmatrix} -4 & 8 \\ -3 & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$ y $k = 3$ calcule kB.
Solución:

$$kB = 3\begin{pmatrix} -4 & 8 \\ -3 & \frac{5}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 24 \\ -9 & 5 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3.11. Si $A = \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$ y $k = -4$, $l = 3$ y $m = \frac{-3}{2}$

Calcule: a) kA b) lA c) mA

Ejercicio 3.12. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
verifique que:
a) 1 A = A b) (−1) A = −A c) 0A = 0 d) k 0 = 0, donde 0 es la matriz nula.

Ejemplo 3.10. Si $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ encuentre (−2) A + 3 B

$$(-2)A + 3B = -2\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ -10 & -14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 & 9 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 16 & 1 \\ -16 & -11 \end{pmatrix}$$

[A]

A + A = 2A;
2A significa que 2 multiplica a todos los elementos de la matriz A.



Al número k se le llama escalar.
Si A es una matriz se dice que kA es producto del escalar k por la matriz A.



El producto de una matriz por un escalar se encuentra multiplicando el escalar por cada elemento de la matriz.

114 | Unidad III • Lección 3 • Clase 5. Multiplicación de un escalar por una matriz

b) $-1\begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ c) $0\begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ d) $k\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ejemplo 3.10. (5 min). Concluir que el escalar −2 multiplica a cada elemento de la matriz A y que el escalar 3 multiplica a cada elemento de la matriz B, y que por último hay que hacer la suma de matrices de los productos obtenidos.

Objetivo: **[A]** Definir el producto de matrices.
[B] Multiplicar matricies.

Evaluación: Ejercicio 3.15

Unidad III. Lección 3.

Clase 5

(Continuación)

Clase 6

(Continúa en la siguiente página)

Ejercicio 3.13.

Si A = $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ B = $\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ C = $\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Encuentre: (–3)A – 2B b) 3(A – B) – 4C c) (–2) (A – B – C)

Si A y B son matrices de orden n x m y k y l son números reales, se cumple que:

a) (kl) A = $k(l$A)
b) $(k + l)$ A = kA + lA
c) k(A + B) = kA + kB

[B]

Demostración de k(A + B) = kA + kB

$$k\,(A + B) = k\left[\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\right]$$
$$= k\left[\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}\right]$$
$$= \begin{pmatrix} k(a_{11}+b_{11}) & k(a_{12}+b_{12}) \\ k(a_{21}+b_{21}) & k(a_{22}+b_{22}) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} ka_{11}+kb_{11} & ka_{12}+kb_{12} \\ ka_{21}+kb_{21} & ka_{22}+kb_{22} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} kb_{11} & kb_{12} \\ kb_{21} & kb_{22} \end{pmatrix}$$
$$= k\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$
$$= kA + kB$$

Se utiliza la propiedad distributiva de los números reales.

Ejercicio 3.14. Demuestre los incisos a) y b) de [B]

Clase 6. Multiplicación de matrices

[A]

La primera tabla muestra el resultado de los juegos de dos equipos. En la segunda se presenta la cantidad de puntos obtenidos por cada tipo de juego.

	Ganados	Empatados	Perdidos
Honduras	5	2	3
Costa Rica	3	2	5

Juego	Puntos
Ganado	3
Empatado	1
Perdido	0

Encuentre el valor de puntos obtenidos por cada equipo.

 **Ejercicio 3.13**
(7 min) Solución

a) $\begin{pmatrix} -26 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -1 & -7 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 10 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

[B] Demostrar que dada dos matrices A y B ambas de orden n x m y los escalares k y l se cumple que:

k(A + B) = kA +kB.

Desarrollar la demostración escribiendo los elementos a_{ij} y b_{ij} de las matrices A y B respectivamente y realizar paso a paso las operaciones necesarias.

*Tener cuidado con el uso de los paréntesis y la aplicación de la propiedad distributiva. (7 min)

 **Ejercicio 3.14**
(6 min). Desarrollar ambas demostraciones en forma similar a la planteada en 7.

a) (kl)A = $k(l$A)

Sea A = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

(kl)A = $(kl)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$= k\begin{pmatrix} la_{11} & la_{12} \\ la_{21} & la_{22} \end{pmatrix}$

$= k\left(l\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\right) = k(l$A)

b) Se omite la solución.

[Hasta aquí Clase 5]

[Desde aquí Clase 6]

*Expresar los arreglos rectangulares como el producto de matrices.

*Interpretar los datos de la tabla y obtener la cantidad de puntos obtenidos por cada equipo.

Clase 6
(Continuación)

(Continúa en la siguiente página)

*Expresar los puntos obtenidos por ambos equipos en una matriz.

*Expresar las 2 tablas y los resultados como el producto de matrices.

*Concluir que el producto de dos matrices se encuentra multiplicando cada elemento de la primera fila de la matriz A por su correspondiente elemento de la columna de la matriz B, igual se hace con los elementos de la segunda fila de la matriz A.

*Resaltar la posición de los elementos del producto de dos matrices. (10 min)

Ejemplo 3.11. (5 min)

Ejemplo 3.12 (5 min)
Definir el producto de matrices.
Resaltar que el producto de matrices sólo se puede realizar cuando el número de columnas de la primera matriz es igual al número de filas de la segunda matriz.

Los puntos se obtienen así:
5(3) + 2(1) + 3(0) = 15 + 2 + 0 = 17
3(3) + 2(1) + 5 (0) = 9 + 2 + 0 = 11

Los resultados, Honduras 17 puntos y Costa Rica 11 puntos se pueden expresar con la matriz $\begin{pmatrix} 17 \\ 11 \end{pmatrix}$

La situación anterior y sus resultados puede expresarse como el producto de dos matrices de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5(3)+2(1)+3(0) \\ 3(3)+2(1)+5(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 11 \end{pmatrix}$$

El producto de la primera fila de la matriz A por la primera columna de la matriz B se coloca en la posición primera fila -primera columna de la matriz resultante.

Si denotamos A = $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$; B = $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y C = $\begin{pmatrix} 17 \\ 11 \end{pmatrix}$ se encuentra el producto AB = C multiplicando cada elemento de la primera fila de la matriz A por su correspondiente elemento de la columna de la matriz B. Lo mismo se hace con los elementos de la segunda fila de la matriz A.

Ejemplo 3.11.

Si A = $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ encuentre AB.

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3(1)+0(0) & 3(3)+0(2) \\ 4(1)+1(0) & 4(3)+1(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 4 & 14 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 3.12.

Si A = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ encuentre AB.

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{pmatrix}$$



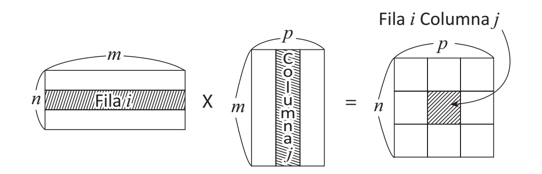
El producto de matrices solo puede ejecutarse si el número de columnas de la primera matriz es igual al número de filas de la segunda matriz.

Definición 3.2. Si A es una matriz de orden n x m y B es una matriz de orden m x p, el producto de las matrices AB = C es una matriz de orden n x p, donde cada elemento C_{ij} es el producto de la fila i de la matriz A por la columna j de la matriz B.

Si A es una matriz de orden n x m y B es una matriz de orden m x p el producto C es una matriz de orden n x p.

Clase 6
(Continuación)

(Continúa en la siguiente página)



$A \times A = A^2$

Producto de matrices cuadradas:

$(AB)C = A(BC)$

$A(B+C) = AB + AC$

$(A+B)C = AC + BC$

Ejemplo 3.13.

a) $\begin{pmatrix} -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4(1)+3(0) & -4(3)+3(4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -4 & -5 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 2(3)+(-1)(1) & 2(2)+(-1)(-4) & 2(0)+(-1)(-5) \\ 4(3)+2(1) & 4(2)+2(-4) & 4(0)+2(-5) \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 5 & 8 & 5 \\ 14 & 0 & -10 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 1(-3)+4(0)+2(1) & 1(2)+4(4)+2(0) & 1(1)+4(-3)+2(2) \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -1 & 18 & -7 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4(3)+0(1)+1(0)+3(4) \end{pmatrix} = (24)$

Ejercicio 3.15. Encuentre el producto de las siguientes matrices.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Ejemplo 3.13
(7 min)

Ejercicio 3.15
(7 min)

a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

b) (14)

c) $\begin{pmatrix} 13 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -4 & -8 & -12 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Clase 6
(Continuación)

Ejemplo 3.14
(7 min)
Concluir que el producto de matrices no siempre es conmutativo.

Si el producto de las matrices A × B se puede realizar, no siempre B × A se puede multiplicar.

Ejemplo 3.14.

a) Si $A = \begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & -11 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ encuentre AB y BA.

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -11 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12-11 & -44+44 \\ 3-3 & -11+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & -11 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12-11 & 33-33 \\ -4+4 & -11+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se concluye que AB = BA.

b) Si $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ encuentre AB y BA.

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+3 & 3-4 \\ 0+0 & 2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+2 & 0+0 \\ 9-8 & 3+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Se concluye que AB ≠ BA

c) Si $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ encuentre AB y BA

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9+2+0 & -3+4+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 4 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$ No se puede efectuar el producto porque la matriz B es de orden 3x2 y la matriz A es de orden 1x3.

La multiplicación de matrices no es conmutativa.
Dado dos matrices A y B, aunque los productos AB y BA pueden calcularse, AB no siempre es igual a BA.



La multiplicación de matrices no es conmutativa.

Objetivo: **[A]** Definir la matriz inversa de una matriz.
[B] Encontrar la matriz inversa de una matriz.

Evaluación: [A] Ejercicio 3.16

Unidad III. Lección 3.
Clase 7
(Continúa en la siguiente página)

Clase 7. Matriz inversa

En el ejemplo 3.14 inciso a) se tiene que

$AB = \begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -11 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. A esta última matriz se le llama matriz identidad.

Son ejemplos de matriz identidad las siguientes:

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

de orden 2x2; 3x3 y 4x4 respectivamente.

En la matriz Identidad a la línea formada por 1 se le denomina diagonal principal.

Ejemplo 3.15.

Si $A = \begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ encuentre AI y IA.

$AI = \begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+0 & 0+11 \\ 1+0 & 0+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = A$

$IA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+0 & 11+0 \\ 0+1 & 0+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = A$

Se concluye que A I = I A = A.

Sea A una matriz de n x n y I la matriz identidad de orden n x n entonces A I = I A = A.

Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ la matriz nula del mismo orden que la matriz A. Encuentre A N y N A.

$AN = \begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = N$

$NA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = N$

Sea A una matriz de n x n y N la matrtiz nula de orden n x n entonces AN = NA = N

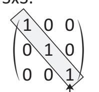
[A] 

Solo las matrices cuadradas tienen matriz identidad.



En la matriz identidad los elementos de la diagonal principal son 1 y los demás elementos son 0.

Matriz Identidad de orden 3x3.



Diagonal principal.

En la matriz nula todos los elementos son ceros.

$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ es una matriz nula de orden 3x3.

[A] Definir la matriz identidad.

(5 min)

*Concluir que las matrices del tipo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se llaman **matriz identidad**.

*Resaltar que las matrices identidades son matrices cuadradas.

*Destacar que en las matrices identidades la diagonal principal está formada por 1 y los demás elementos son 0.
(5 min)

Concluir que
AI = IA = A.

 *** Ejemplo 3.15.**
*Concluir que
AI = IA = A.
(7 min)

*Desarrollar AN y NA.

*Concluir que
AN = NA = N.
(7 min)

Clase 7
(Continuación)

[B] Definir la matriz inversa.
*Dadas las matrices:

$A = \begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y

$B = \begin{pmatrix} 3 & -11 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

encuentre AB y BA.

*Concluir que si AB = BA = I entonces B es la matriz inversa de A.
*Hacer énfasis en la notación para escribir la matriz inversa de una matriz A. (10 min)

Encontrar la matriz inversa de una matriz dada expresando las relaciones entre los elementos como sistemas de ecuaciones.

Ejemplo 3.16
*Expresar la matriz inversa en forma general con variables como:

$$\begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix}$$

*Expresar el producto de la matriz A por su matriz inversa como $AA^{-1} = I$.
*Formar los dos sistemas de ecuaciones lineales y encontrar los valores para w, x, y, z.
*Comprobar que $AA^{-1} = I$ y concluir que A^{-1} es la matriz inversa de A. (12 min)

Si $A = \begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & -11 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ encuentre AB.

¿Qué observa?

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -11 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I,$$

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & -11 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Si AB = BA = I se dice que B es la matriz inversa de A.

En general la matriz inversa de A se representa como A^{-1} y se lee "matriz A inversa".

[B]



Todo número real a diferente de cero tiene un inverso multiplicativo $\frac{1}{a}$ tal que $a\left(\frac{1}{a}\right) = 1$.

De forma análoga si la matriz A tiene su matriz inversa A^{-1} entonces $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

Ejemplo 3.16. Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ encuentre la matriz inversa de A.

Solución: Si A es una matriz de 2x2 entonces $A^{-1} = \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix}$.

Por definición se sabe que $AA^{-1} = I$ entonces

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$= \begin{pmatrix} 2w+5y & 2x+5z \\ w+3y & x+3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De la igualdad de las matrices se forman dos sistemas de ecuaciones lineales.

$$\begin{cases} 2w+5y = 1 \\ w+3y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x+5z = 0 \\ x+3z = 1 \end{cases}$$

Resolviendo los sistemas encontramos los valores para w, x, y, z.
Si $y = -1$ entonces $2w + 5y = 1$, $2w + 5(-1) = 1$, $w = 3$
Si $z = 2$ entonces $2x + 5z = 0$, $2x + 5(2) = 0$, $x = -5$.

y $\begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ satisface $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = I$

por lo tanto la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ es $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$



Si A^{-1} es la matriz inversa de A, entonces A es la matriz inversa de A^{-1}.

Ejercicio 3.16. Verifique que $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ es la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ comprobando que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

120 | Unidad III • Lección 3 • Clase 7. Matriz inversa

Ejercicio 3.16 (4 min) Solución

a) $$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(3)+(5)(-1) & 2(-5)+(5)(2) \\ 1(3)+3(-1) & 1(-5)+3(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3(2)+(-5)(1) & 3(5)+(-5)(3) \\ (-1)(2)+2(1) & (-1)(5)+2(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

*Concluir que si $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$ entonces A es la inversa de la matriz A^{-1}. (4 min)

Objetivo: **[A]** Encontrar la matriz inversa de una matriz.

Evaluación: [A] Ejercicios 3.17 y 3.18

Unidad III. Lección 3.
Clase 8
(Continúa en la siguiente página)

Clase 8. Matriz inversa (Forma general)

Ejemplo 3.17.

Si A = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ es una matriz de orden 2x2 donde

$ad - bc \neq 0$, encuentre la matriz inversa de A en forma general.

Solución: Sea $A^{-1} = \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix}$ la matriz inversa de A.

Por definición $AA^{-1} = I$ por tanto:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$\begin{pmatrix} aw+by & ax+bz \\ cw+dy & cx+dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se forman dos sistemas de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} aw+by = 1 \\ cw+dy = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} ax+bz = 0 \\ cx+dz = 1 \end{cases}$$

Se resuelven para encontrar los valores para w, x, y, z.

$$\begin{cases} aw+by = 1 \ (d) \\ cw+dy = 0 \ (-b) \end{cases} \qquad \begin{cases} ax+bz = 0 \ (d) \\ cx+dz = 1 \ (-b) \end{cases}$$

$adw + bdy = d$
$-bcw - bdy = 0$

$adw - bcw = d$
$w(ad - bc) = d$, cuando $ad - bc \neq 0$

$$w = \frac{d}{ad-bc}$$

$adx + bdz = 0$
$-bcx - bdz = -b$

$adx - bcx = -b$
$x(ad - bc) = -b$ cuando $ad - bc \neq 0$

$$x = \frac{-b}{ad-bc}$$

$$\begin{cases} aw+by = 1 \ (-c) \\ cw+dy = 0 \ (a) \end{cases} \qquad \begin{cases} ax+bz = 0 \ (-c) \\ cx+dz = 1 \ (a) \end{cases}$$

$-acw - bcy = -c$
$acw + ady = 0$

$-bcy + ady = -c$
$y(ad - bc) = -c$, cuando $ad - bc \neq 0$

$$y = \frac{-c}{ad-bc}$$

$-acx - bcz = 0$
$acx + adz = a$

$-bcz + adz = a$
$z(ad - bc) = a$, cuando $ad - bc \neq 0$

$$z = \frac{a}{ad-bc}$$

Unidad III • Lección 3 • Clase 8. Matriz inversa (Forma general) | 121

Ejemplo 3.17
(20 min)

Encontrar la matriz inversa de una matriz dada en su forma general.

*Si A = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y $ad - bc \neq 0$ encuentre la matriz inversa A^{-1}.

*Desarrollar este ejemplo en forma similar al realizado en la clase anterior.

*Al resolver los sistemas hay que hacer que los estudiantes noten que las variables tienen la expresión $ad - bc$ como factor común en el denominador, razón por la cual ésta debe ser distinta de cero.

Clase 8
(Continuación)

Definir el determinante de una matriz.
*Concluir que a la expresión $ad - bc$ se le llama determinante.
*Hacer énfasis en las diferentes notaciones al escribir el determinante.
*Concluir que si el determinante es distinto de cero la matriz tiene inversa.

*Definir la inversa de una matriz de orden 2×2. (5 min)

Ejercicio 3.17
(10 min) Solución
a) $|A| = 10 - 9 = 1$
b) $|B| = -8 - 6 = -14$
c) $|C| = 16 - 16 = 0$

Ejercicio 3.18
(10 min) Solución

a) $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

$= 1\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

b) $B^{-1} = \frac{1}{|B|}\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{-14}\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{3}{14} \\ \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix}$

Estos valores satisfacen $\begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = I$

En forma general la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ donde $ad - bc \neq 0$ es:

$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}$

$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ . . . . sacando $\frac{1}{ad - bc}$ como factor común.

A la expresión $ad - bc$ se le llama determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y se denota por $|A|$.

Determinante de una matriz de 2x2.
El determinante de una matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de 2x2 se define como $|A| = ad - bc$.

También se denota el determinante de la matriz A como det (A).

La matriz inversa de 2x2
Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ es una matriz de 2x2 y $|A| \neq 0$
entonces $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Ejercicio 3.17. Encuentre el determinante de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$



Si el $|A| = 0$ la matriz A no tiene inversa.

Ejercicio 3.18. Encuentre si existe la matriz inversa de las matrices planteadas en el ejercicio 3.17.

c) $C^{-1} = \frac{1}{|C|}\begin{pmatrix} 4 & -8 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{0}\begin{pmatrix} 4 & -8 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ = No existe



Fundamentos de álgebra

1. Competencias de la Unidad

1. Representar graficamente la ecuación de primer grado en dos variables.
2. Determinar los interceptos, pendiente y ecuación de la recta.
3. Solucionar sistemas de ecuaciones de primer grado con tres variables por el método algebraico.

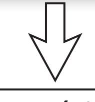
2. Relación y Desarrollo

Octavo grado

Funciones de primer grado
- Sistema de ecuaciones de primer grado en dos variables

Matemática I

Unidad IV:
- Lección 1: Ecuaciones de rectas.
- Lección 2: Sistema de ecuaciones de primer grado en tres variables.



Matemática III

Unidad II: Geometría analítica

Matemática IV

Unidad III: Diferenciación e integrales de funciones polinómicas
Unidad IV: Derivadas de funciones trascendentales

3. **Plan de Estudio de la Unidad** (7 horas)

Lección	Clase/hora	Contenidos	Términos y signos
1. Ecuaciones de rectas	1	La gráfica de la función de primer grado	ecuación de recta, pendiente, intercepto en x, intercepto en y
	2	Pendiente y ecuación de la recta que pasa por dos puntos dados	
	3 4	Encontrar la intersección de dos rectas, condición de paralelismo Condición de perpendicularidad	
	5	Relación entre el sistema de ecuaciones de primer grado y la intersección de rectas	
2. Sistema de ecuaciones de primer grado en tres variables	1	Método de eliminación	
	2	Método de sustitución	

Puntos de lección

Lección 1: Ecuaciones de rectas

En el 8vo grado los estudiantes aprendieron las gráficas de las funciones de primer grado. La ventaja de utilizar el concepto de función es que se puede encontrar la coordenada y sustituyendo el valor de x. Si se presenta una ecuación $ax + by + c = 0$, hay que pensar en la pareja de dos números que satisfacen la ecuación, esto cuesta más a los estudiantes.

En esta lección se enseñan las ecuaciones de las rectas que no son las gráficas de funciones, es decir, la recta perpendicular al eje x. También las condiciones de paralelismo y de perpendicularidad de dos rectas son los nuevos temas.

Aplicando la condición de paralelismo, se da la condición de que el sistema de ecuaciones de primer grado en dos variables tenga solución.

Lección 2: Sistema de ecuaciones de primer grado en tres variables

Como en el caso de las ecuaciones en dos variables, hay dos métodos: eliminación y sustitución.

El punto es reducir a dos ecuaciones en dos variables. Una vez hecho esto, se puede resolverl con el otro método. No es necesario utilizar el mismo hasta el fin.

Unidad IV. Lección 1.

Clase 1

(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: Entender que la gráfica de la función de primer grado es una recta.

Evaluación: Ejercicio 1.1, 1.2, 1.3, 1.4

(3 min)



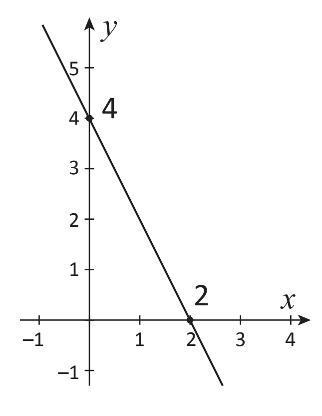
Ejemplo 1.1
(3 min)



Ejemplo 1.2
(5 min)

Términos: pendiente, intercepto en x y y.
(4 min)

Ejercicio 1.1
(5 min) Solución



Lección 1. Ecuaciones de rectas

Clase 1. La gráfica de la función de primer grado

Si a cada valor de x el valor de y está dado por la ecuación $y = mx + n$ donde $m \neq 0$, se dice que y es la función de primer grado de x.



m y n son constantes es decir no cambian sus valores.

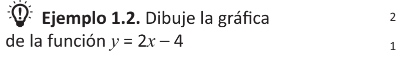
Ejemplo 1.1. ¿Cuáles son funciones de primer grado de x?

a) $y = 2x - 3$ b) $y = -3x^2 + 4x + 1$ c) $y = \sqrt{x+1}$

d) $y = 3$ e) $y = \frac{1}{x}$ f) $3x + 2y + 1 = 0$

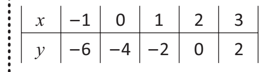
solución: a) y f)

El inciso f) es equivalente a $y = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$

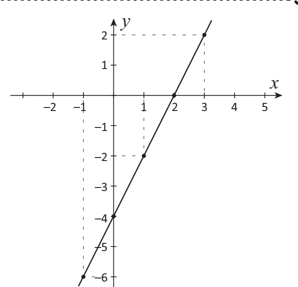


Ejemplo 1.2. Dibuje la gráfica de la función $y = 2x - 4$

Solución:



x	–1	0	1	2	3
y	–6	–4	–2	0	2



La gráfica cruza el eje x en (2, 0) y el eje y en (0, –4)

La gráfica de la función $y = mx + n$ $(m \neq 0)$ es una recta.

A la expresión $y = mx + n$ se le llama **ecuación de** esta **recta**.

Al coeficiente m se le denomina **pendiente** de esta recta.

La recta cruza el eje y en el punto $(0, n)$.

A la constante n se le denomina **intercepto en y**.

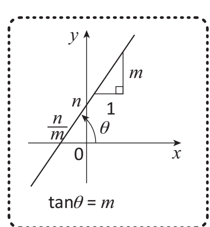
La recta cruza el eje x en el punto $(-\frac{n}{m}, 0)$.

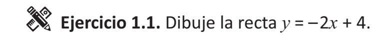
Al número $-\frac{n}{m}$ se le denomina **intercepto en x**.



La pendiente es la inclinación de la recta.

Cuando el valor de x aumenta en 1, el valor de y aumenta en m.





Ejercicio 1.1. Dibuje la recta $y = -2x + 4$.

124 | Unidad IV • Lección 1 • Clase 1. La gráfica de la función de primer grado

Clase 1
(Continuación)

Ejemplo 1.3. Encuentre la pendiente, el intercepto en y y el intercepto en x de la recta $y = -3x + 6$

Solución:
La pendiente es −3, el intercepto en y es 6 y el intercepto en x es $\frac{-6}{-3} = 2$.

Ejercicio 1.2. Encuentre la pendiente, el intercepto en x y el intercepto en y.
a) $y = 3x - 6$ b) $y = x + 5$ c) $y = -4x + 8$ d) $y = 5x + 7$

Ejemplo 1.4. Encuentre la ecuación de la recta cuya pendiente es 3 y cuyo intercepto en y es 1

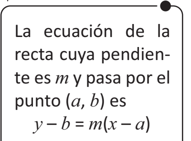
Solución: $y = 3x + 1$

Ejercicio 1.3. Encuentre las ecuaciones de las siguientes rectas.

	a)	b)	c)	d)
Pendiente	4	−3	5	$\frac{1}{2}$
Intercepto en y	2	1	−2	3

Ejemplo 1.5. Encuentre la ecuación de la recta cuya pendiente es 2 y pasa por el punto (3, 5).

Solución:
Como la pendiente es 2, la ecuación es $y = 2x + n$. Como el punto (3, 5) está en la recta, se tiene que $5 = 2 \times 3 + n$, $n = -1$.
Por lo tanto $y = 2x - 1$ (Respuesta)



Ejercicio 1.4. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto indicado y que tiene la pendiente dada.

a) (2, −1), la pendiente es 1

b) (1, 3), la pendiente es 3

c) (−2, 1), la pendiente es −3

c) (−3, 0), la pendiente es −1

Ejemplo 1.3.
(4 min)

 **Ejercicio 1.2.**
(4 min) Solución

	Pend.	Int. x	Int. y
a)	3	2	−6
b)	1	−5	5
c)	−4	2	8
d)	5	$-\frac{7}{5}$	7

 **Ejemplo 1.4.**
(3 min)

 **Ejercicio 1.3.**
(4 min)
a) $y = 4x + 2$
b) $y = -3x + 1$
c) $y = 5x - 2$
d) $y = \frac{1}{2}x + 3$

 **Ejemplo 1.5**
(4 min)

 **Ejercicio 1.4.**
(6 min) Solución
a) $y = x - 3$
b) $y = 3x$
c) $y = -3x - 5$
d) $y = -x - 3$

Unidad IV. Lección 1.

Clase 2

(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: **[A]** Encontrar la ecuación de la recta que pasa por dos puntos dados.
[B] Identificar las ecuaciones de las rectas que no son gráficas de la función de primer grado.

Evaluación: A] Ejercicio 1.5. [B] Ejercicio 1.6, 1.7

[A]

Ejemplo 1.6.
(8 min)

Nota: (5 min)

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

Solución 2 (6 min)

Ejercicio 1.5.
(8 min) Solución

a) $y = 3x + 1$

b) $y = -x + 3$

c) $y = x - 4$

d) $y = -2x + 1$

[B]

Ejemplo 1.7.
(8 min)
Hay que recordar la definición de coordenadas.

Clase 2. Ecuaciones de rectas

Ejemplo 1.6. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por los puntos (3, 2) y (5, 6).

Solución 1:
Sea $y = mx + n$ la ecuación de la recta. Como dos puntos están en la recta, sus coordenadas satisfacen la ecuación, por lo tanto

$$\begin{cases} 3m + n = 2 \text{ ....(1)} \\ 5m + n = 6 \text{ ....(2)} \end{cases}$$

(2) – (1)

$$\begin{array}{r} 5m + n = 6 \\ -\ (3m + n = 2) \\ \hline 2m = 4 \\ m = 2 \end{array}$$

Sustituyendo $m = 2$ en (1), se obtiene que $n = -4$
Respuesta $y = 2x - 4$

Nota: Del cálculo de arriba se obtiene lo siguiente.

La pendiente de la recta que pasa por dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) donde $x_1 \neq x_2$ es $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Solución 2:
La pendiente de la recta es $\frac{6-2}{5-3} = 2$.
Por lo tanto, la ecuación de la recta es $y = 2x + n$. Sustituyendo (3, 2), se tiene que $2 = 2 \times 3 + n$, $n = -4$
Respuesta: $y = 2x - 4$

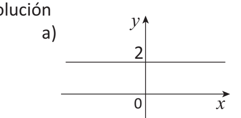
Ejercicio 1.5. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por los puntos dados.
a) (1, 4), (3, 10) b) (1, 2), (3, 0)

c) (1, –3), (3, –1) d) (1, –1), (–1, 3)

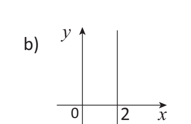
Hay rectas que no son gráficas de funciones de primer grado.

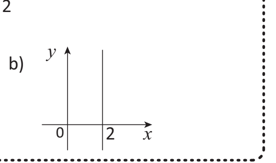
Ejemplo 1.7. Dibuje el conjunto de puntos cuyas coordenadas satisfacen la siguiente ecuación.
a) $y = 2$ b) $x = 2$

Solución
a)

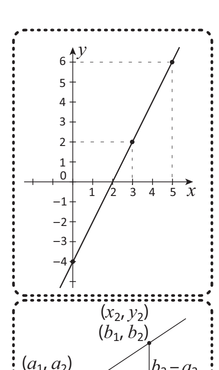


b)





[A]



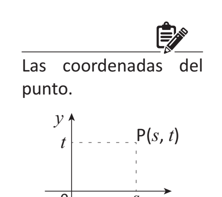
(x_2, y_2)
(b_1, b_2)
(a_1, a_2)
(x_1, y_1)
$b_2 - a_2$
$y_2 - y_1$
$b_1 - a_1$
$x_2 - x_1$

Solución 2 utiliza la nota.

Se puede sustituir (6, 5) también.

[B]

Las coordenadas del punto.



Objetivo: Entender la relación entre los puntos de intersección y la solución de las ecuaciones.

Evaluación: Ejercicio 1.8, 1.9

Unidad IV. Lección 1.

Clase 2
(Continuación)

Clase 3
(Continúa en la siguiente página)

En a) del Ejercicio 1.7. la pendiente de la recta es 0.
En b) no se define la pendiente.

Ejercicio1.6. Encuentre la ecuación de la recta.

a) La pendiente es 0, el intercepto en y es -1.

b) Paralela al eje x y que pasa por el punto (3, 1).

c) Paralela al eje y y el intercepto en x es 3.

d) Perpendicular al eje y y pasa por el punto $(-2, 1)$.

Ejercicio 1.7. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por los puntos dados.

a) $(-3, 2)$, $(4, 2)$ b) $(2, 1)$, $(2, 5)$

c) $(0, -1)$, $(0, 2)$ d) $(5, 0)$, $(1, 0)$

Clase 3. Intersección de dos rectas

Ejemplo 1.8. Encuentre las coordenadas del punto de intersección de las rectas $y = 3x - 1$ y $y = -2x + 4$.

Solución:

Que un punto esté en la intersección de dos rectas equivale a que sus coordenadas satisfacen ambas ecuaciones, es decir, son la solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} y = 3x - 1 \\ y = -2x + 4 \end{cases}$$ por lo tanto $x = 1$, $y = 2$

Respuesta (1, 2)

Dos rectas no paralelas se intersecan en un punto.
"Encontrar el punto" quiere decir encontrar las coordenadas del punto.

Punto de intersección ⟺ Solución del sistema de ecuaciones



Ejercicio 1.8. Encuentre el punto de intersección.

a) $y = 3x - 4$, $y = x - 2$ b) $y = -2x + 4$, $y = 2x - 8$

c) $y = -2x + 1$, $y = 3$ d) $y = 3x - 2$, $x = -1$

e) $x = 3$, $y = -2$

Unidad IV • Lección 1 • Clase 3. Intersección de dos rectas | 127



Ejercicio 1.6
(5 min) Solución

a) $y = -1$

b) $y = 1$

c) $x = 3$

d) $y = 1$

Ejercicio 1.7
(5 min) Solución

a) $y = 2$

b) $x = 2$

c) $x = 0$

d) $y = 0$

[Hasta aquí Clase 2]

[Desde aquí Clase 3]

Ejemplo 1.8
(7 min)

Ejercicio 1.8
(9 min) Solución

a) $(1, -1)$

b) $(3, -2)$

c) $(-1, 3)$

d) $(-1, -5)$

e) $(3, -2)$

Clase 3
(Continuación)

(Continúa en la siguiente página)

 **Ejemplo 1.9**

(6 min)

Explicación sobre el caso donde las rectas son paralelas. (8 min)

 **Ejercicio 1.9**

(4 min) Solución

a) y d); b) y c)

Ejemplo 1.10

(4 min)

Ejemplo 1.9. Investigue si las rectas tienen puntos en común:

$y = 2x - 1$, $y = 2x + 3$

Solución:

Se trata de resolver

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = 2x + 3 \end{cases}$$

Eliminando y se tiene que $2x - 1 = 2x + 3$

Esto equivale a que $0 = 4$, que es imposible.

Que el sistema de ecuaciones no tenga soluciones equivalente a que las rectas no tengan puntos en común. Las rectas son paralelas.

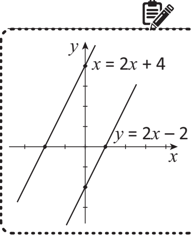
Dadas las ecuaciones de dos rectas

$y = mx + n$ y $y = m'x + n'$, eliminando y se tiene que $mx + n = m'x + n'$.

Si $m \neq m'$, como en el caso del ejemplo 1.8, estas rectas se intersecan en un punto.

Si $m = m'$, y $n \neq n'$, como en el caso del ejemplo 1.9, estas rectas son paralelas.

Si $m = m'$, y $n = n'$, las dos rectas son idénticas.



Dos rectas son paralelas.

En resumen

> Sean $y = mx + n$ y $y = m'x + n'$, dos rectas:
> Si $m \neq m'$, entonces estas rectas se intersecan en un punto.
> Si $m = m'$, y $n \neq n'$, entonces estas rectas son paralelas.

$m \neq m'$ $m = m'$

Ejercicio 1.9. Encuentre los grupos de rectas paralelas.

a) $y = 2x + 1$ b) $y = -2x - 3$ c) $y = -2x - 5$

d) $y = 2x + 4$ e) $y = 4x - 2$ f) $y = 3x + 1$

g) $y = -3x - 2$

Ejemplo 1.10. Encuentre la ecuación de la recta que es paralela a $y = 3x - 1$ y pasa por el punto (2, 1).

Solución:

De la condición del paralelismo, se sabe que la pendiente es 3.

Por lo tanto, la ecuación es $y = 3x + n$. Sustituyendo (2, 1), se tiene que;

$1 = 3 \times 2 + n$, $n = -5$.

Respuesta: $y = 3x - 5$

"Encontrar la recta" quiere decir encontrar su ecuación.

128 | Unidad IV • Lección 1 • Clase 3. Intersección de dos rectas

Objetivo: Entender la relación entre las pendientes de las rectas perpendiculares.

Evaluación: Ejercicio 1.11, 1.12

Unidad IV. Lección 1.

Clase 3
(Continuación)

Clase 4
(Continúa en la siguiente página)

Ejercicio 1.10. Encuentre la recta que es paralela a la recta dada y que pasa por el punto indicado.

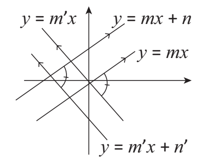
a) $y = 2x - 1$, (3, 2) b) $y = x + 3$, (1, 2)

c) $y = -3x + 1$, (1, 3) d) $y = -2x + 1$, (−2, 3)

Clase 4. Perpendicularidad de las rectas

Dos rectas $y = mx + n$ y $y = m'x + n'$, son perpendiculares si y sólo si $mm' = -1$

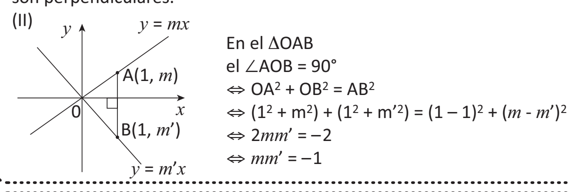
Otra pareja de rectas perpendiculares es: $x = a$ y $y = b$



Teorema de Pitágoras y su inverso.

Si P(x_1, x_2) y Q(x_2, y_2)
$PQ^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

Demostración:
(I) $y = mx + n$ y $y = m'x + n'$, son perpendiculares ⇔ $y = mx$ y $y = m'x$ son perpendiculares.
(II)



En el ΔOAB
el ∠AOB = 90°
⇔ $OA^2 + OB^2 = AB^2$
⇔ $(1^2 + m^2) + (1^2 + m'^2) = (1 - 1)^2 + (m - m')^2$
⇔ $2mm' = -2$
⇔ $mm' = -1$

Ejemplo 1.11. Investigue si las dos rectas son perpendiculares o no.

a) $y = 3x - 1$, $y = -\frac{1}{3}x + 2$ b) $y = 2x + 3$, $y = \frac{1}{2}x - 2$

Solución:

a) $3 \times \left(-\frac{1}{3}\right) = -1$. Son perpendiculares.

b) $2 \times \frac{1}{2} = 1$. No son perpendiculares.

Ejercicio 1.11. Encuentre las parejas de rectas perpendiculares.

a) $y = x + 3$ b) $y = -2x + 1$

c) $y = \frac{2}{3}x + 4$ d) $y = 2x + 1$

e) $y = \frac{1}{2}x + 5$ f) $y = \frac{-3}{2}x - 1$

g) $y = -x - 1$

Unidad IV • Lección 1 • Clase 4. Perpendicularidad de las rectas | 129

Ejercicio 1.10
(7 min) Solución
a) $y = 2x - 4$
b) $y = x + 1$
c) $x = -3x + 6$
d) $y = -2x - 1$

[Hasta aquí Clase 3]

[Desde aquí Clase 4]

Condición de perpendicularidad. (15 min)

Ejemplo 1.11
(6 min)

Ejercicio 1.11
(6 min) Solución
a) y g), b) y e), c) y f)

Unidad IV. Lección 1.

Clase 4
(Continuación)

Clase 5
(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: Entender los tres casos en cuanto al número de soluciones de un sistema de ecuaciones de primer grado en dos variables.

Evaluación: Ejercicio 1.13

Ejemplo 1.12
(8 min)


Ejercicio 1.12
(10 min) Solución

a) $y = -\frac{1}{3}x + 3$

b) $y = -x + 1$

c) $y = -2x + 5$

d) $y = -\frac{3}{2}x - 1$

[Hasta aquí Clase 4]

[Desde aquí Clase 5]

Ejemplo 1.13
(8 min)

Las gráficas de las ecuaciones.
(6 min)

Ejemplo 1.12. Encuentre la ecuación de la recta perpendicular a la recta $y = 2x + 1$ y pasa por el punto (4, 1).
Solución:
Sea $y = mx + n$ la recta. Como es perpendicular a $y = 2x + 1$, se tiene que $2m = -1$, $m = -\frac{1}{2}$. Por lo que $y = -\frac{1}{2}x + n$.
Sustituyendo el punto (4, 1) en $y = -\frac{1}{2}x + n$, se obtiene $n = 3$.
Respuesta: $y = -\frac{1}{2}x + 3$

Ejercicio 1.12. Encuentre la recta perpendicular a la recta dada y que pasa por el punto indicado.

a) $y = 3x + 2$, (6, 1) b) $y = x - 1$, (−2, 3)
c) $y = \frac{1}{2}x + 5$, (3, −1) d) $y = \frac{2}{3}x + 4$, (−4, 5)

Clase 5. Sistema de ecuaciones de primer grado en dos variables y sus gráficas

Ejemplo 1.13. Resuelva.

a) $\begin{cases} 2x + y = 0 \quad ...(1) \\ x - y - 3 = 0 \quad ...(2) \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - y + 4 = 0 \quad ...(1) \\ 4x - 2y + 4 = 0 \quad ...(2) \end{cases}$ c) $\begin{cases} -2x + y - 4 = 0 \quad ...(1) \\ 4x - 2y + 8 = 0 \quad ...(2) \end{cases}$

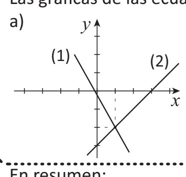
Solución:
a) $x = 1$, $y = -2$

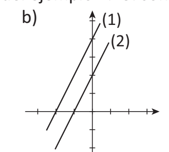
b) (1) x 2 $\quad 4x - 2y + 8 = 0$
(2) $\quad -(4x - 2y + 4 = 0)$
$\quad 4 = 0$ Es imposible. Respuesta: No hay solución.

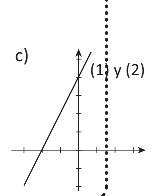
c) (1) x (−2) $4x - 2y + 8 = 0$ es igual a (2).
Por lo tanto, los valores de x y y que satisfacen (1), satisfacen también (2).
Respuesta: $x = s$, $y = 2s + 4$ (s número real)

Hay otras formas como ser $x = \frac{1}{2}t - 2$, $y = t$

Las gráficas de las ecuaciones del ejemplo 1.13. son;

a)


b)


c)


En resumen:

Si las rectas	Se intersecan en un punto	Son paralelas	Coinciden
Número de soluciones	1	0	infinitas

Clase 5
(Continuación)

Ejemplo 1.14. Encuentre el número de soluciones de los sistemas de ecuaciones lineales.

a) $\begin{cases} 3x+y-1=0 \\ 6x+2y+4=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-y+1=0 \\ x+y-2=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x-y+2=0 \\ -6x+2y-4=0 \end{cases}$

Solución: Se convierten todas las ecuaciones a la forma de $y = mx + n$.

Sistema de ecuaciones	Gráficas	Número de soluciones
a) $\begin{cases} y=-3x+1 \\ y=-3x-2 \end{cases}$	Paralelas	0
b) $\begin{cases} y=2x+1 \\ y=-x+2 \end{cases}$	Se intersecan	1
c) $\begin{cases} y=3x+2 \\ y=3x+2 \end{cases}$	Coinciden	Infinitas

No es necesario solucionarlo.

Ejercicio 1.13. Encuentre el número de solución.

a) $\begin{cases} 3x-y+3=0 \\ -6x+2y+4=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-y+3=0 \\ x+y+1=0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x-y+1=0 \\ 2x-2y+2=0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x+2y-3=0 \\ -2x+y+1=0 \end{cases}$

*Ejemplo 1.15. Determine el valor de a de modo que el siguiente sistema de ecuaciones no tenga solución.

$$\begin{cases} 3x-y+1=0 \\ (a+1)x+2y+1=0 \end{cases}$$

Solución:

El sistema equivale a $\begin{cases} y=3x+1 \\ y=-\frac{a+1}{2}x-\frac{1}{2} \end{cases}$.

Que no tiene solución equivale a que las rectas son paralelas y por lo tanto sus pendientes son iguales.

$3=-\frac{(a+1)}{2}$ y $1 \neq -\frac{1}{2}$. $a=-7$ (Respuesta)

Un sistema de ecuaciones no tiene solución cuando las rectas son paralelas.

Hay que confirmar que las dos rectas son diferentes.

*Ejercicio 1.14. Determine el valor de a de modo que el sistema no tenga solución.

a) $\begin{cases} -2x-y-2=0 \\ 2ax-y+1=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x+2y+1=0 \\ (a-1)x+y-2=0 \end{cases}$

Unidad IV • Lección 1 • Clase 5. Sistema de ecuaciones de primer grado en dos variables y las gráficas | 131

Ejemplo 1.14
(10 min)

Ejercicio 1.13
(10 min) Solución

a) (1) x 2 + (2), es 10 = 0 por lo tanto el número de soluciones es cero.

b) 1 solución.

c) (2) ÷ 2 = (1), por lo tanto, tiene soluciones.

d) 1 solución.

* Ejemplo 1.15
(5 min)

*Ejercicio 1.14
(6 min) Solución:

a) $\begin{cases} y=-2x-2 \\ y=2mx+1 \end{cases}$

$2m=-2$, $m=-1$ y $2 \neq 1$

Respuesta: $m=-1$

b) $\begin{cases} y=-\frac{3}{2}x-\frac{1}{2} \\ y=-(a-1)x+2 \end{cases}$

$-\frac{3}{2}=-(a-1)$, $a=\frac{5}{2}$

y $-\frac{1}{2} \neq 2$

Respuesta: $a=\frac{5}{2}$

Unidad IV. Lección 2.
Clase 1

Objetivo: Entender el método de eliminación en la solución de sistemas de ecuaciones de primer grado en tres variables.

Evaluación: Ejercicio 2.1

Ejemplo 2.1.
(15 min)



Ejercicio 2.1.
(30 min) Solución

a) (–2, 1, 2)

b) (1, 1, 1)

c) (–2, 1, 1)

d) (0, –3, 1)

Lección 2. Sistema de ecuaciones de primer grado en tres variables

Clase 1. Método de eliminación

Para encontrar los valores de las tres variables se necesitan tres ecuaciones.

Ejemplo 2.1. Resuelva.

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 2 \quad \ldots(1) \\ -2x + y + z = 5 \quad \ldots(2) \\ 2x + 3y + 2z = 6 \quad \ldots(3) \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{array}{lr} (1) & 3x + 2y + z = 2 \\ (2) & -\ (-2x + y + z = 5) \\ \hline & 5x + y = -3 \ \ldots(4) \end{array} \qquad \begin{array}{lr} (1)\times 2 & 6x + 4y + 2z = 4 \\ (3) & -\ (2x + 3y + 2z = 6) \\ \hline & 4x + y = -2 \ \ldots(5) \end{array}$$

De (4) y (5) se obtiene $x = -1$, $y = 2$.
Sustituyéndolos en (1) se obtiene $z = 1$

Respuesta: $x = -1$, $y = 2$, $z = 1$

Primero forme ecuaciones que contengan solo x y y.

Hay que elegir la variable que se va a eliminar según la forma de las ecuaciones.

En el método de eliminación: se busca reemplazar las ecuaciones originales del sistema en ecuaciones equivalentes, hasta llegar a un sistema de ecuaciones con una solución obvia.

Ejercicios 2.1. Resuelva.

a) $\begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ 3x - 2y + z = -6 \\ -2x - 2y + z = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + y - z = 3 \\ 2x - y + 2z = 3 \\ x + 3y - 3z = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - 2y + 3z = -1 \\ x + 3y + 2z = 3 \\ -2x + y + z = 6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - 2y + z = 7 \\ 2x + y + 3z = 0 \\ 3x + 3y + 2z = -7 \end{cases}$

132 | Unidad IV • Lección 2 • Clase 1. Método de eliminación

Objetivo: Entender el método de sustitución en la solución de sistemas de ecuaciones de primer grado en tres variables.

Unidad IV. Lección 2.
Clase 2

Evaluación: Ejercicio 2.2

Clase 2. Método de sustitución

Hay otra manera de obtener ecuaciones de dos variables.

Ejemplo 2.2. Resuelva.

$$\begin{cases} 2x - y + z = -2 \quad \ldots(1) \\ 3x + 2y + 2z = 2 \quad \ldots(2) \\ 2x - 3y + 3z = 2 \quad \ldots(3) \end{cases}$$

Solución:
De (1) se tiene que $z = -2x + y - 2$ ….(4)
Sustituyendo (4) en (2) y (3), se obtiene

$3x + 2y + 2(-2x + y - 2) = 2.$ $\qquad -x + 4y = 6$ …(5)

$2x - 3y + 3(-2x + y - 2) = 2,$ $\qquad -4x = 8$ …(6)

De (5) y (6) se obtiene $x = -2,\quad y = 1$
Sustituyendo estos valores en (4), se obtiene $z = 3$.
Respuesta: $x = -2,\quad y = 1,\quad z = 3$

En el método de sustitución hay que despejar para una variable en una de las ecuaciones y sustituir este valor en las otras dos ecuaciones para formar un sistema de 2 ecuaciones en 2 variables y asi facilitar su solución.

Ejercicio 2.2. Resuelva.

a) $\begin{cases} 2x - y + 2z = 6 \\ 3x + 2y - z = 4 \\ 4x + 3y - 3z = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - y + 3z = -2 \\ 3x + 2y - 2z = 1 \\ 4x + 3y + 4z = 9 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y - 4z = 6 \\ 3x + 3y + 2z = 4 \\ 2x + 2y + 3z = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x + 2y + 2z = 5 \\ -2x + 3y - 4z = 2 \\ 4x - y + 3z = 6 \end{cases}$

Unidad IV • Lección 2 • Clase 2. Método de sustitución 133

Ejemplo 2.2
(15 min)

Ejercicio 2.2
(30 min) Solución

a) (1, 2, 3)

b) (–1, 3,1)

c) (2, 0, –1)

d) (3, 0, –2)

AGRADECIMIENTO

La Secretaría de Educación, La Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán y La Agencia de Cooperación Internacional del Japón, AGRADECEN al personal docente y estudiantes de los centros educativos gubernamentales de Educación Media que participaron en el proceso de validación de los contenidos de los Libros y las Guías de Matemática para 10mo y 11mo grado que fueron elaborados en el marco del Proyecto de Mejoramiento de la Enseñanza Técnica en el Área de Matemática Fase III (PROMETAM FASE III).

DISTRITO CENTRAL - FRANCISCO MORAZÁN
Instituto Héctor Pineda Ugarte
Braulio Joel Gómez Sierra
Gustavo Adolfo Padilla Maradiaga
Allison Xiomara Chávez Ogando

Instituto España Jesús Milla Selva
Edna Evelyn Henríquez Rivera
Franklin Sadí Flores Osorto
Thesla Mariella Cerrato Coello

Instituto Blanca Adriana Ponce
Verónica Teodorlinda Acuña Sarantes
Víctor Manuel Mejía C.

Centro de Investigación e Innovación Educativa (CIIE–UPNFM)
Rooy Estiven Fúnez Posadas

CHOLUTECA, CHOLUTECA
Instituto José Cecilio del Valle
Margarita Alvarenga Sandoval

COPÁN,
Instituto Copán Galel - Corquín
Rubén Arturo Álvarez Calidonio

Instituto Bernardo Galindo y Galindo – La Entrada, Nueva Arcadia
Walter Ananías Murillo Domínguez

SAN PEDRO SULA, CORTÉS
Instituto José Trinidad Reyes
Geovanni Javier Andino Sevilla
Martha Elena Perdomo Fernández

DANLÍ, EL PARAÍSO
Instituto Departamental de Oriente
Lilibeth Carolina López Zavala

Escuela Normal España Villa Ahumada
Digna Zulema Laínez Berríos

GRACIAS, LEMPIRA
Centro de Investigación e Innovación Educativa (CIIE – UPNFM)
Dioselina Serrano Benítez